

# LA TASA NATURAL DE INTERES: Estimación para la economía uruguaya.<sup>1</sup>

Verónica España Arias<sup>2</sup>

Versión: Abril 2008

## Resumen

Este documento aborda el tema de la tasa natural de interés (TNI) y presenta una estimación de la misma para la economía uruguaya en el período comprendido entre 1992.I y 2007.II. La metodología utilizada es la desarrollada por Laubach y Williams (2001), que fuera adaptada por Mésonnier y Renne (2004). Aplicando el filtro de Kalman a un modelo semiestructural pequeño de corte nekeynesiano, que intenta recoger las características propias de la economía uruguaya, se estiman conjuntamente la tasa de interés de equilibrio y la brecha producto. Como diferencia entre la tasa de interés real y la TNI, surge la brecha de la tasa de interés, que se constituye en un indicador para evaluar las instancias de política monetaria durante el período de estudio. Cuando la referida brecha es positiva, se concluye que la instancia monetaria es contractiva; de otra manera, cuando la brecha es negativa el sesgo de la política se considera expansivo. De esta forma, el indicador sugiere que la instancia monetaria en los últimos tres años de análisis ha sido sistemáticamente expansiva. Para el mismo período, se estima que la brecha producto fue positiva, lo que está en línea con lo estimado por otros trabajos realizados en la materia. En lo que respecta a la utilización de este tipo de estimaciones para la toma de decisiones de política monetaria en tiempo real, se considera que debe ser realizada con cautela, teniendo presentes las relativizaciones que le caben a las mismas, las cuales son desarrolladas en el presente documento. Finalmente, los resultados alcanzados en la presente investigación no parecen diferir en gran forma de lo hallado para otros países de América Latina.

Códigos de clasificación JEL: C32, E43, E52

Palabras claves: Tasa natural de interés, tasa de interés de equilibrio, filtro de Kalman, brecha producto, producto potencial, modelo semiestructural, representación estado-espacio, variables no observables, instancia de política monetaria.

---

<sup>1</sup> Documento elaborado en base al trabajo de tesis realizado para la obtención del título de Master en Economía de la Universidad de la República, dirigido por Elizabeth Bucacos. El mismo está a disposición de quienes deseen profundizar en el tema. Los conceptos involucrados en este documento son de estricta responsabilidad de la autora, no comprometiéndolo por tanto, la opinión institucional del Banco Central del Uruguay. Quisiera expresar mi agradecimiento a Elizabeth Bucacos por su excelente labor como tutora. También agradecer los valiosos aportes y comentarios que realizaron Daniel Dominioni, Adriana Induni, Elena Ganon, Gerardo Licandro, Alejandro Pena y Leonardo Vicente. Por último, quisiera agradecer a quienes de una u otra forma me brindaron elementos para conformar la base de datos necesaria para este estudio: Jorge Basal, Andrés Bialostosky, Luis Cáceres, Rosanna Fernandez, Kariné Hagopian, Gabriela Pacheco y Alvaro Pérez.

<sup>2</sup> E-mail de contacto: [vespana@bcu.gub.uy](mailto:vespana@bcu.gub.uy)

## Tabla de contenido

<b>I. INTRODUCCION .....</b>	<b>3</b>
<b>II. LA TASA NATURAL DE INTERES.....</b>	<b>5</b>
<b>III. METODOS DE ESTIMACION .....</b>	<b>10</b>
III.1 Media de las tasas reales de interés efectivas de corto plazo .....	10
III.2 Modelos estructurales.....	11
III.3 Indicadores de los mercados financieros.....	11
III.4 Modelos de componentes inobservables .....	12
<b>IV. TRABAJO EMPIRICO:.....</b>	<b>14</b>
IV.1 Estrategia econométrica: .....	14
IV.2 El modelo: .....	14
IV.3 El filtro de Kalman: .....	18
IV.4 Relativizaciones a la estimación:.....	23
IV.5 Variables que intervienen en el análisis: .....	26
IV.6 Estimación del modelo: filtro de Kalman .....	27
IV.7 Resultados obtenidos:.....	33
<b>V. CONCLUSIONES: .....</b>	<b>39</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:.....</b>	<b>41</b>

# I. INTRODUCCION

Desde julio de 2007 el Banco Central del Uruguay (BCU) utiliza como instrumento de política monetaria la tasa de interés interbancaria<sup>3</sup>. En este nuevo marco, resulta fundamental que la autoridad monetaria (y los analistas económicos en general) cuente con indicadores que le permitan monitorear si la instancia de política que está llevando adelante resulta acorde con el objetivo buscado, la estabilidad de precios<sup>4</sup>.

La tasa de interés real que cumple con el objetivo planteado, es la tasa de interés natural (TNI). Esta tasa fue definida originalmente por el economista sueco Knut Wicksell a fines del siglo XIX<sup>5</sup>, como aquella tasa de interés que era neutral para los precios, en el sentido de que no provocaba presiones ni al alza ni a la baja de los mismos.

En función de dicha propiedad, la brecha entre la tasa de interés de política y la natural se constituye en un indicador de la instancia de política. Cuando dicha brecha es positiva, estaremos ante una instancia restrictiva que busca la disminución de los precios, y si la brecha es negativa, la instancia será expansiva generando de esta forma presiones inflacionarias.

Sin embargo, la construcción del mencionado indicador no es sencilla, puesto que la TNI es una variable no observable y existen distintas formas de aproximarse empíricamente a la misma. Luego de analizar críticamente las diferentes metodologías de estimación que surgen de la bibliografía consultada, se opta por la metodología originaria de Labauch y Williams (2001), modificada por Mésonnier y Réne (2004) y en este caso adaptada para recoger las particularidades propias de la economía uruguaya, en particular sus características de economía pequeña y abierta.

---

<sup>3</sup> Según consta en el comunicado de prensa del Comité de Política Monetaria (COPOM) del 4/9/2007. En los hechos y a modo de ensayo venía utilizándose la tasa de interés como instrumento de política monetaria desde abril del mismo año. En el COPOM de febrero de 2008 se decide utilizar como tasa de referencia la tasa media de mercado, incluyendo en la misma, además de la mencionada a las tasas de los instrumentos a un día del BCU.

<sup>4</sup> Dicho objetivo es establecido por la carta orgánica del BCU en su artículo tercero.

<sup>5</sup> En este punto parece haber consenso académico, sin embargo, Witr y otros (2005) mencionan como excepción la Escuela de Pensamiento Económico de Estocolmo, que señala que Wicksell se inspiró en los trabajos de Gunnar Myrdal.

La estimación, surge de la utilización del filtro de Kalman y de un algoritmo de maximización aplicado a un modelo semiestructural para una economía pequeña y abierta. El modelo utilizado es de corte nekeynesiano, utilizando para capturar el comportamiento de la inflación la curva de Phillips (curva de oferta agregada) y una curva de demanda agregada representada por la curva IS. La regla de política monetaria, aparece implícitamente en la información utilizada, como es habitual en los países en los cuales no ha habido reglas explícitas en el período muestral analizado. La dinámica del sistema es impuesta por las variaciones de baja frecuencia de la productividad de la economía, variable que explica las fluctuaciones comunes de la TNI y del producto potencial, por lo cual, la estimación de dichas variables surge de manera conjunta.

A pesar de la simplicidad del modelo empleado y el relativamente corto periodo de tiempo analizado (1992:I a 2007:II) se considera que es una buena aproximación al problema en cuestión y se constituye en el primer antecedente para la economía uruguaya sobre el cual hay campo para continuar avanzando.

En cuanto al rol de la TNI en el marco de la política monetaria activa, cabe mencionar, que si bien su estimación se constituye en un indicador de la posición de política, dadas las dificultades que presenta la evaluación de la misma por su carácter no observable, debe ser considerada como una herramienta más dentro del conjunto de información a ser evaluado por las autoridades monetarias al conducir su política. Por otra parte, a la hora de analizar la política monetaria desde una perspectiva histórica, este indicador no encuentra críticas, permitiendo evaluar las instancias monetarias pasadas y sus efectos sobre el producto y la inflación.

Este trabajo se estructura en cinco capítulos incluyendo esta introducción. En el siguiente capítulo se define la TNI. Luego de abordar el tema desde un punto de vista teórico, en el capítulo dos se realiza la aproximación empírica al mismo, presentando las diferentes estrategias metodológicas de estimación. En el capítulo cuarto, se presenta el trabajo empírico. Este capítulo contiene en primer lugar la metodología econométrica utilizada, definiendo para ello el modelo semiestructural empleado y el filtro de Kalman. Dentro de este capítulo, además, se detallan los pasos seguidos para la estimación de los distintos parámetros necesarios para la aplicación del mencionado filtro y se analizan los resultados obtenidos. En el quinto y último capítulo, se realizan comentarios finales.

## II. LA TASA NATURAL DE INTERES

El origen del concepto de la tasa natural de interés se remonta a 1898. En dicha fecha, Wicksell define a la TNI en términos del rendimiento del capital. Según este autor, dicha tasa es equivalente al rendimiento obtenido por la inversión física en una economía sin fricciones. Esto es, en ausencia de rigideces nominales, la tasa de rendimiento del capital se corresponde con su productividad marginal neta de depreciación, y a dicho nivel de rendimiento, se logra el equilibrio de largo plazo entre oferta y demanda de factores productivos, de forma tal, que no existen presiones sobre los precios y el producto se encuentra en su nivel potencial.

La definición “Wickselliana” de la TNI está relacionada con factores estructurales y es la tasa que prevalecerá bajo precios flexibles. Sin embargo, bajo la existencia de rigideces nominales (de precios y/o salarios) se generan brechas entre la tasa de interés real observada en la economía y su tasa natural.

En función de dicha definición, Wicksell establece una relación entre la brecha de la tasa de interés real respecto a la TNI y la evolución de los precios. La tasa natural es la única tasa de interés a la que se puede pedir prestado que es neutral a los precios, en el sentido de que no tiende a incrementarlos ni a disminuirlos. Si la tasa de interés real se encuentra por debajo de su valor de equilibrio (brecha negativa), los precios se incrementarían y si por el contrario la brecha es positiva los precios disminuirían.

Taylor a comienzos de los noventa, desarrolla una regla simple para determinar la tasa de interés nominal de corto plazo, e incorpora en la misma a la TNI. En la regla de Taylor, la tasa de interés nominal de corto plazo es una función lineal que se basa en un valor de equilibrio de la tasa de interés (TNI) y en dos brechas, la de la inflación respecto a su valor meta y la del producto respecto a su nivel potencial, como se observa en la siguiente ecuación:

## Ecuación 1

$$r_t = r^N + \beta(E_t p_{t+1} - \bar{p}_{t+1}) + \partial E_t (y_t - y_t^N) + v_t$$

*Siendo,*

*r la tasa de interés real*

*$\bar{\pi}$  inflación meta*

*$E_t \pi_{t+1}$  inflación esperada 1 períodos en adelante*

*$y_t$  Producto en t*

*$v_t$  choque de política monetario exógeno*

*variables en "N" equilibrio (TNI y potencial)*

Si bien en la regla de Taylor la tasa de equilibrio es considerada constante, siendo la ordenada en el origen de la ecuación 1, en la definición descrita por Wicksell, la tasa de equilibrio es variable en el tiempo, varía en función de los fundamentos de la economía. En éste sentido, la evolución de la tasa de equilibrio esta sujeta a shocks reales y varía en la medida de que éstos afectan el nivel del producto potencial, cambian sus determinantes fundamentales, las preferencias de los consumidores, se suscitan cambios tecnológicos o se producen cambios estructurales producto de la política fiscal o del grado de apertura de la economía, cambia la productividad, la tasa de crecimiento de la población, o el stock del capital. A modo de ejemplo, si los consumidores anticipan un incremento en la productividad, desearán consumir más en el presente como consecuencia del incremento esperado en su ingreso, por lo cual, para mantener el equilibrio, la tasa natural de interés deberá incrementarse, incentivando el ahorro de forma de evitar presiones de demanda que incrementen la brecha producto.

A comienzos del siglo XXI Woodford retoma el concepto de TNI planteado por Wicksell, en el sentido de que considera a dicha tasa variable en el tiempo, al extremo de definirla como aquella tasa real que asegura en todo momento la estabilidad de precios. Woodford define la TNI como la tasa de interés real en un modelo de equilibrio general con precios flexibles, y en este esquema, aunque depende solo de variables reales, la tasa real observada es afectada por shocks nominales, por lo que puede diferir de su valor de equilibrio. Sin embargo, la política monetaria no afecta la TNI, porque no tiene efectos sobre el equilibrio real de la economía, ni a corto, ni a largo plazo<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> Al respecto ver Woodford (2003, pag. 247-250).

De la mano de Woodford, surge una numerosa bibliografía en el marco del análisis de la política monetaria que Mésonnier y Renne (2004) denominan “Neo-Wickselliana”. Dentro de esta corriente, pueden distinguirse distintos subgrupos, en función de la metodología de estimación que utilizan para aproximarse al concepto de la tasa de equilibrio.

Laubach y Williams (2001) establecen que la característica de variabilidad en el tiempo de la TNI es lo que dificulta su estimación. Dichos autores señalan que de no verificarse dicha característica, para estimar la mencionada tasa, bastaría con calcular la media simple de la tasa de interés real de corto plazo para un periodo relativamente largo de tiempo y sin grandes fluctuaciones de la inflación tendencial.

Estos autores, para ejemplificar la relación entre la tasa natural de interés y sus fundamentos utilizan el contexto estándar de los modelos de crecimiento neoclásico, según el cual, la tasa de interés de equilibrio esta en función de la tasa de crecimiento tendencial del producto. Echevarría y otros (2006), consideran al respecto el modelo de Ramsey (1928), obteniendo una relación positiva entre la tasa de interés neutral y el crecimiento de la productividad multifactorial.

## **Ecuación 2**

$$r^N = f'(k^*) - \delta = \rho + qa$$

*Siendo,*

*a crecimiento porcentual de la productividad multifactorial*

*$\delta$  tasa de depreciación del capital*

*$k^*$  relación capital trabajo en el estado estacionario*

*$r^N$  TNI*

*$\rho$  tasa de preferencia intertemporal por el consumo*

*q coeficiente de aversión al riesgo en la función de utilidad*

Desde el punto de vista empírico, la aproximación al concepto de interés encuentra dos enfoques, dependiendo de la frecuencia temporal en que se basen sus estimaciones, uno basado en el corto plazo y otro que se centra más en el mediano y largo plazo. Laubach y Williams (2001) descomponen los movimientos del producto en fluctuaciones de baja y alta frecuencia, el primero de estos enfoques trata de estimar el componente de alta frecuencia y el segundo se centra en el de baja.

Desde la perspectiva de corto plazo, la TNI se define como aquel rendimiento que garantiza la estabilidad de precios período a período. Esto es posible en un equilibrio que se logra en ausencia de rigideces de precios. Esta aproximación, se identifica con la metodología de modelos estructurales descrita en el próximo capítulo, punto III.2. Los trabajos que se basan en esta perspectiva, explican la mayor parte de las fluctuaciones de las tasas reales observadas por fluctuaciones en la TNI.

Como fue mencionado, otro grupo de autores, se basan en una perspectiva de más baja frecuencia. Bajo este punto de vista, la TNI se abstrae de las fluctuaciones de los precios y del producto de corto plazo. Asimilándose este concepto de tasa de equilibrio al del producto potencial en el sentido de variable latente y de largo plazo. La tasa de interés real puede entonces, en el corto plazo diferir de la tasa neutral, pero en períodos largos se supone que las variables observables coincidirán en promedio con las inobservables. La TNI desde esta perspectiva, es aquella tasa consistente con una inflación estable y un producto en su nivel potencial, es decir, es la tasa de interés real de corto plazo que prevalece cuando los efectos de los shocks sobre la demanda y sobre la oferta han desaparecido. La metodología que se guía por esta definición es la desarrollada originalmente por Laubach y Williams (2001), se clasifica en el capítulo siguiente dentro del punto III.4 y es la elegida para la aproximación empírica del fenómeno en cuestión en el presente trabajo, por las razones que se exponen posteriormente en el punto IV.1.

## Ilustración II-1

### APROXIMACION TEORICA AL CONCEPTO DE TNI

El concepto de TNI es originario de Wicksell (1898) y retomado un siglo después por la literatura Neo-Wickselliana, en el marco del análisis de la política monetaria.

Se define a la TNI como aquella tasa de interés real de corto plazo que reúne las siguientes características:

1. Es igual a la productividad marginal del capital neta de depreciación
2. Es consistente con el producto en su nivel potencial
3. Se asocia a una relación de equilibrio, consistente con la estabilidad de precios
4. Evoluciona en el tiempo asociada a factores estructurales de la economía (productividad, preferencias de los consumidores, tasa de crecimiento de la población, stock de capital, política fiscal, etc.)

La existencia de rigideces nominales en la economía puede hacer que existan brechas entre el valor de equilibrio de las variables y su valor observado en el corto plazo. Basado en este hecho, a través de los modelos neo-keynesianos, se relacionan la brecha producto, la brecha de la tasa de interés real de corto plazo y la tasa de inflación. Dichas relaciones pueden resumirse en los siguientes encadenamientos:

$$\begin{aligned}i &= i^N \cong \pi^e = 0 \rightarrow y^d = y^o \cong \pi = 0 \rightarrow p = 0 \\i &> i^N \cong \pi^e > 0 \rightarrow \uparrow s \rightarrow y^d < y^o \cong \pi < 0 \rightarrow p < 0 \\i &< i^N \cong \pi^e < 0 \rightarrow \downarrow s \rightarrow y^d > y^o \cong \pi > 0 \rightarrow p > 0\end{aligned}$$

Basado en dichas relaciones la TNI se constituye en un indicador de la instancia de política monetaria. Si la brecha es positiva, se considerara la instancia como contractiva y si es negativa, como expansiva.

La tasa de equilibrio, como toda variable latente presenta dificultades para su estimación y para la evaluación de la misma. En el siguiente capítulo, se presentan las distintas estrategias econométricas que se encuentran en la literatura para estimar dicha tasa y según las cuales se puede encontrar matices en la definición utilizada.

### **III. METODOS DE ESTIMACION**

Siguiendo la clasificación que realizan Wintr y otros (2005) podemos agrupar en cuatro clases las aproximaciones empíricas de la TNI que se encuentran en la bibliografía. A continuación, se analizan críticamente los cuatro métodos y se señalan los autores que se han inclinado por cada uno de ellos.

#### **III.1 Media de las tasas reales de interés efectivas de corto plazo**

El modo más sencillo de estimar la tasa de interés de equilibrio es realizando un simple promedio de las tasas reales de interés de corto plazo efectivas. Este es un método que utiliza un enfoque univariado de series de tiempo. En este caso, la TNI surge de aplicar algún filtro de suavizamiento como el Hodrick-Prescott (HP) sobre las tasas de interés reales observadas. Los filtros así aplicados sobre las series de tiempo, separan el componente cíclico de la tendencia secular, utilizando dicha tendencia como proxy del nivel natural de la serie.

Si bien este método posee la ventaja de ser relativamente sencillo de aplicar y requiere solamente modelar la estructura de la serie, posee desventajas asociadas también a su sencillez. Según Williams (2001) este método brinda buenas estimaciones en períodos de inflación estable y crecimiento del producto, pero es un mal estimador cuando la inflación cambia sustancialmente. Tiende a subestimar la TNI cuando la inflación se incrementa y a sobreestimarla cuando se verifican períodos de deflación.

Orphanides y Williams (2001) utilizan este método como una de las formas de aproximarse al concepto. Por otra parte, Castillo y otros (2006), lo utilizan como referente para evaluar su estimación de la TNI para Perú basada en la aplicación del filtro de Kalman a un modelo semiestructural.

## III.2 Modelos estructurales

Una forma de obtener una estimación de la tasa de equilibrio variable en el tiempo y a su vez contar con una interpretación económica de dicha evolución, es construir un modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE, por su sigla en inglés). La TNI, es la tasa de rendimiento real que iguala la demanda agregada con el producto potencial en todo momento, dado que en estos modelos neo-keynesianos generalmente se representa una economía con precios totalmente flexibles.

Este tipo de metodología se centra en estimar una tasa de interés real que se obtiene en un equilibrio donde el enfoque es de corto plazo.

Este enfoque de DSGE posee la ventaja de brindar una interpretación estructural de la brecha de la tasa de interés y de sus fluctuaciones, cosa que los enfoques puramente estadísticos como los presentados en el punto anterior no permiten. Sin embargo, este tipo de estimación recibe la crítica de ser muy volátil y sensible a los supuestos que se consideren para elaborar el modelo, respecto a la estructura de la economía y a la estructura de los shocks. En algunos casos incluso, la TNI estimada puede resultar mas volátil que la tasa de interés real efectivamente observada (Giammarioli y Valla; 2003).

## III.3 Indicadores de los mercados financieros

Otra metodología utilizada es inferir la tasa real de equilibrio de la opinión de los inversores en bonos indexados a la inflación. Los rendimientos reales de los títulos indexados a la inflación son tomados como proxy de la TNI. Esta metodología considera que las expectativas de los participantes del mercado acerca de las tasas de interés de 5 a 10 años en adelante, son la mejor predicción de la tasa de interés de equilibrio de largo plazo.

Las ventajas que se le reconocen a este enfoque tienen que ver con su simplicidad, el hecho de ser *forward-looking* y que está disponible en tiempo real. Sin embargo, encuentra la crítica de no ser aplicable en gran parte de las economías, dado que no se cuenta con una serie lo suficientemente extensa, puesto que en la mayoría de los países los instrumentos indexados a la inflación son relativamente recientes. Otra crítica, es que generalmente los bonos indexados a la inflación están

distorsionados por el premio por la liquidez, por el plazo y pueden estarlo, coyunturalmente, por ruidos en los mercados.

Bomfim (1997) es señalado en la literatura consultada como el precursor de este método, aplicándolo para Estados Unidos.

### **III.4 Modelos de componentes inobservables**

Otra estrategia de estimación, es estimar una serie de tiempo para la tasa natural de interés, a través de los modelos de componentes inobservables. Se comienza especificando un modelo macroeconómico simple, compuesto por una forma reducida de la curva de Phillips representando la oferta, una curva de demanda simplificada en la IS, y otras ecuaciones que explican la dinámica del sistema. A dicho modelo semiestructural se le aplica el filtro de Kalman (cuyo desarrollo teórico se presenta en el punto IV.3) y se estima simultáneamente la TNI variable en función del tiempo y el producto potencial u otros componentes inobservables como la tasa natural de desempleo.

Mediante este método, la TNI se enfoca en el mediano plazo, cuando los efectos de shocks transitorios en la brecha del producto y la inflación han desaparecido. En este sentido, ésta estrategia respeta la definición de Wicksell.

La ventaja de este enfoque semiestructural, es su robustez frente a los supuestos estructurales que se impongan. Si bien es menos preciso en su forma que los modelos DSGE, es una definición más tratable desde el punto de vista práctico y es el método que obtiene más adeptos en la literatura.

Sin embargo, es necesario relativizar el uso que se puede dar a la estimación de la TNI que surge de esta metodología. Estas limitaciones tienen que ver con el hecho de realizar estimaciones en tiempo real y con el sesgo hacia el cero en la distribución de probabilidad de algunos parámetros a estimar por máxima verosimilitud ("*pile-up*"). Problemas que son retomados y profundizados en el punto IV.4<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> Considerando que como se detalla más adelante en el documento, es la metodología elegida para este trabajo, se prefirió profundizar en estas relativizaciones en dicho punto para que a la hora de la lectura de los resultados obtenidos se tengan bien presentes sus aplicaciones y limitaciones.

Dichas relativizaciones sugieren que este tipo de estimaciones debe ser tomado con cautela a la hora de realizar recomendaciones de política económica. Sin embargo, esta metodología intermedia entre la complejidad de los DSGE y las estimaciones puramente estadísticas comúnmente utilizadas aplicando el filtro de HP brinda una estimación que se constituye en una herramienta útil para analizar, *ex post*, la instancia de política monetaria.

Para concluir este capítulo, en la siguiente ilustración se resumen los métodos de estimación analizados:

### Ilustración III-1

Método	Procedimiento	Ventajas	Limitaciones
<b>Medias de tasas de interés reales efectivas</b>	Filtros estadísticos que asocian la TNI al componente tendencial de la serie. Ej. HP	Método de aplicación relativamente sencilla	Este enfoque univariado se encuentra muy influenciado por la estructura de la serie, lo cual puede conducir a sesgos en la estimación.
<b>Modelos estructurales</b>	Se estima la TNI como la tasa de rendimiento real que iguala la demanda agregada con el producto potencial en todo momento a través de un modelo de equilibrio general dinámico estocástico.	Permite una visión estructural acerca de la brecha de la tasa de interés y de sus fluctuaciones.	La estimación es muy sensible a los supuestos acerca de la estructura de la economía y de sus shocks, en este enfoque de corto plazo.
<b>Indicadores de los mercados financieros</b>	Los rendimientos reales de los títulos indexados a la inflación son tomados como proxy de la TNI.	Enfoque simple, <i>forward-looking</i> y disponible en tiempo real.	Disponibilidad de series de emisiones indexadas a distintos plazos. Distorsiones relacionadas con el premio por la liquidez, plazo y ruidos coyunturales de los mercados.
<b>Modelos de componentes inobservables</b>	La TNI surge de la aplicación del filtro de Kalman sobre un modelo semiestructural pequeño que representa la economía.	Enfoque de mediano plazo, más sencillo que el basado en modelos estructurales y robusto en lo que tiene que ver con sus supuestos.	Las limitaciones refieren a: la especificación del modelo, la estimación en tiempo real y al problema <i>pile-up</i> .

## IV. TRABAJO EMPIRICO

### IV.1 Estrategia econométrica

En función del análisis crítico realizado acerca de los distintos métodos que existen para estimar la TNI, se opta por la metodología originaria de Laubach y Williams (2001), basada en la estimación de la misma a través del filtro de Kalman aplicado a un modelo semiestructural de componentes inobservables. El fundamento de la elección, además de basarse en los pros y contras de cada método, se basa en las limitaciones que encuentran la aplicación de los mismos en el marco de la economía uruguaya. Al respecto, cabe mencionar que aún no se disponen estimaciones de un modelo DSGE<sup>8</sup>, existe un esfuerzo muy reciente de construir una curva de rendimientos por lo cual aún no es posible inferir la TNI del punto de vista de los inversores y tampoco se cuenta con una serie extensa de instrumentos indexados<sup>9</sup>.

En el enfoque adoptado, la TNI es la tasa de interés real de corto plazo consistente con el producto en su nivel potencial y la inflación igual a la meta de mediano plazo, es decir, cuando los shocks nominales han desaparecido.

### IV.2 El modelo

Como fuera mencionado anteriormente, el modelo es del estilo del propuesto por Laubach y Williams (2001) modificado por Mésonnier y Renne (2004) y Echevarría y otros (2006), y adaptado para recoger las características propias de la economía uruguaya.

Tal como se presenta en la ecuación 5, el modelo general está compuesto por una curva IS, que representa la curva de demanda agregada, una curva de Phillips para simbolizar la curva de oferta y tres ecuaciones más que describen la dinámica del modelo, la cual está en línea con el modelo de crecimiento de Ramsey para el estado estacionario, planteado anteriormente en la ecuación 2.

---

<sup>8</sup> Sin embargo, Bucacos, BCU, está trabajando en un modelo DSGE y espera que próximamente esté funcionando.

<sup>9</sup> Los mismos comenzaron a emitirse poco después del 12 de junio de 2002, fecha en que el Poder Ejecutivo dispuso la creación de la unidad indexada, y existieron períodos de tiempo en los cuales dichas emisiones se discontinuaron.

La regla de política está implícita en el modelo, como es común en la literatura para el caso de aquellos países que no poseen una regla explícita de política dentro del período muestral analizado. De forma simplificadora, se supone que la política monetaria solo afecta la tasa de inflación indirectamente, a través de su efecto sobre la brecha producto, por lo cual los hacedores de política influirán sobre la inflación por lo menos con un rezago de dos períodos<sup>10</sup>.

### Ecuación 3

$$\begin{aligned}
 1. \ \% \phi &= \sum_{j=1}^j \alpha \ \% \phi_{t-j} + \sum_{k=1}^k \alpha \ \% p_{t-k} + \sum_{l=0}^l \alpha \ Dq_{t-l} + \sum_{m=0}^m \alpha \ DFI_{t-m} + \\
 &+ \sum_{n=0}^n \alpha \ Dy_{t-n}^B + \sum_{p=0}^p \alpha \ DC_{t-p}^A + \sum_{q=0}^q \alpha \ Dy_{t-q}^{US} + e_t^{\%} \\
 2. \ \pi_t &= \sum_{r=1}^r \beta \ \pi_{t-r} + \sum_{s=0}^s \beta \ \pi_{t-s}^m + \sum_{u=1}^u \beta \ \% \phi_{t-u} + e_t^{\pi} \\
 3. \ r_t^N &= m_t + q_t a_t \\
 4. \ Dy_t^N &= m_y + q_y a_t + e_t^y \\
 5. \ a_t &= Y a_{t-1} + e_t^a \\
 6. \ y_t &= y_t^N + \% \phi \\
 7. \ r_t &= r_t^N + \% p = r_t^N + (i_t - p_{t+1/t} - r_t^N)
 \end{aligned}$$

Para recoger características propias de la economía uruguaya, se incorporan en la ecuación de demanda, punto número 1 en la ecuación 5: el producto brasileño ( $y_t^B$ ), el de Estados Unidos ( $y_t^{US}$ ) el consumo argentino<sup>11</sup> ( $C_t^A$ ), los términos de intercambio ( $TI_t$ ) y el tipo de cambio real multilateral ( $q_t$ ). Si no existen variaciones en dichas variables que representan la demanda externa y si la brecha de la TNI ( $\% \phi$ ) es nula, en ausencia de otros shocks de demanda ( $e_t^{\% \phi}$ ), se cierra la brecha producto ( $\% \phi$ ).

<sup>10</sup> Al respecto, cabe mencionar que existe evidencia empírica para Uruguay que encuentra una vinculación entre la brecha de producto e inflación, pero esa vinculación desaparece cuando se incorporan los salarios. En ese caso, la política monetaria tendría influencia directa en la inflación y a través de la política cambiaria.

<sup>11</sup> También fue testeado el producto argentino, pero como se expone en el anexo del documento de tesis, el modelo que mostró mejor ajuste fue el que tenía el consumo como explicativo.

En la ecuación de oferta, segunda ecuación planteada en el modelo que se especifica en la ecuación 5, como determinante parcial de la inflación se incorpora la evolución de los precios de los bienes importados ( $\pi_i^m$ ) y del tipo de cambio a través de la evolución de dichos precios expresados en pesos.

Las ecuaciones tres y cuatro del modelo definen a la TNI y a la tasa de crecimiento del producto potencial. La TNI es definida como un proceso autorregresivo, y su dinámica es regida en conjunto con la del producto potencial, por la evolución de  $a_t$ <sup>12</sup>, que representa la tasa de crecimiento de la productividad<sup>13</sup>. Siguiendo Mésonnier y Renne (2004), se considera que dicha tasa de crecimiento sigue un proceso autorregresivo estacionario<sup>14</sup> y su persistencia está determinada por el parámetro  $\gamma$ .

La tasa de interés nominal  $i_t$ , refiere a la tasa call interbancaria. La selección de dicha tasa se realizó en función de que bajo el régimen actual de política monetaria la misma es tomada como tasa de referencia. Además, aunque algunos trabajos consideran la tasa implícita en algunos títulos emitidos por el banco central, en el caso de Uruguay no existe una serie continua extensa homogénea de títulos emitidos a ningún plazo en especial. Por su parte, Laubach y Williams (2001) señalan que utilizar tasas de interés de corto plazo tiene tres tipos de ventajas frente a las de largo plazo. La primera tiene que ver con que permite una mejor estimación de las expectativas de inflación, la segunda con que el premio asociado a la preferencia por la liquidez incluido en las tasas de largo es variante en el tiempo y la tercera es que las tasas de largo son afectadas generalmente por las fluctuaciones de otras variables que no afectan a las de corto.

Los choques definidos en cada ecuación,  $\varepsilon$ , se distribuyen normalmente y de manera independiente, con la siguiente matriz de varianzas y covarianzas:

---

<sup>12</sup> A diferencia de Laubach y Williams (2001) se supone que las fluctuaciones de la TNI solo están regidas por la productividad, de otra forma se agrega complejidad al análisis, en el sentido de que se debe inferir de una variable no observable dos componentes inobservables en su comportamiento.

<sup>13</sup> Que las fluctuaciones de baja frecuencia del producto y de la TNI sean comunes, es consistente con la definición planteada de la TNI. Además, aunque en algunos trabajos consultados no se impone dicha restricción, en este caso se aplica el comentario de Manrique y Márquez (2004) acerca de que incorporar más variables que expliquen la evolución de dichas variables en forma separada, agregan parámetros que en una muestra reducida complican a la hora de extraer conclusiones.

<sup>14</sup> Dichos autores trabajan con este supuesto en el entendido de que de no ser así, el producto potencial podría ser integrado de orden 2.

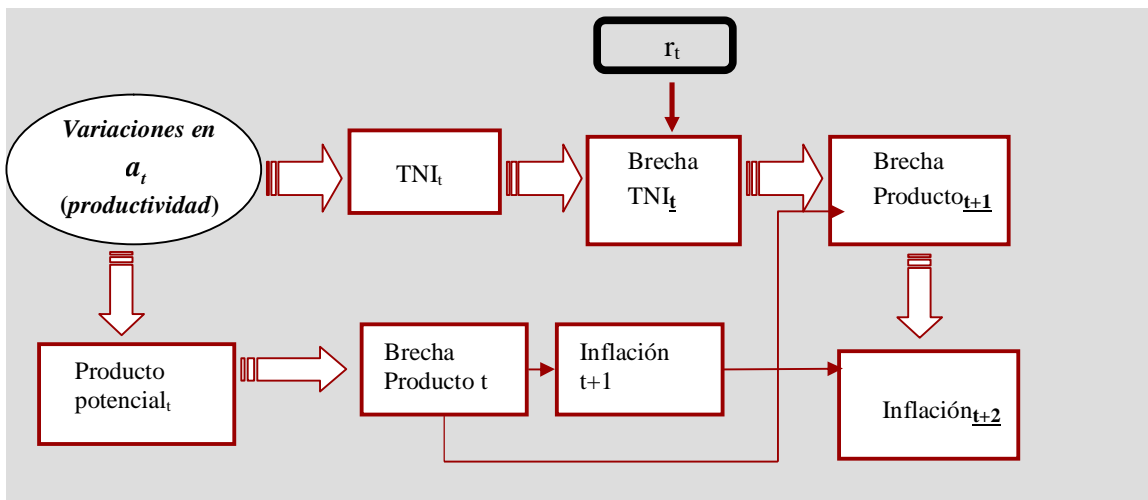
#### Ecuación 4

$$\Sigma^e = \begin{bmatrix} s_{\%}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_a^2 \end{bmatrix}$$

Los rezagos que se incluyen de cada variable en las ecuaciones son determinados a través de la estimación uniecuacional por MCO, tanto de la IS como de la curva de Phillips (para un mayor detalle de esta estimación remitirse al documento de tesis).

A través de la ilustración IV.1 se clarifican los efectos (de primera vuelta) de variaciones en la brecha de la tasa de interés consistentes con la estructura del modelo a estimar.

#### Ilustración IV-1



### IV.3 El filtro de Kalman

En vista de que la TNI es una variable no observable, para su estimación se recurre a la utilización de un algoritmo recursivo de suavizamiento. A partir de la aplicación del filtro desarrollado por Kalman<sup>15</sup>, se obtiene una estimación de dicha variable como una proyección lineal sobre toda la información muestral y la estructura de la economía.

El filtro parte de una representación del estado-espacio del modelo que debe contemplar la realidad siendo simultáneamente parsimonioso. La estimación de la variable no observada se realiza a través de un procedimiento recursivo de predicción y corrección, de forma de obtener un estimador lineal, insesgado y óptimo al momento  $t$  con la información disponible hasta  $t-1$ . El algoritmo adiciona a cada nueva predicción un término proporcional al error de predicción cometido al proyectar a través del modelo las variables observables, de forma de minimizar estadísticamente el error de proyección. Para esto necesita servirse de valores iniciales para la media y la varianza del vector de estado (de variables no observables), los cuales como se menciona posteriormente no resultan triviales.

De manera general, la forma del modelo en su representación estado-espacio consiste en dos grupos de ecuaciones. La primera, denominada ecuación de medida o de observaciones (ecuación 7), expresa el vector de variables observadas ( $M_{t \times w \times 1}$ ) como una función lineal del vector de variables de estado ( $S_{t \times v \times 1}$ ), más otro vector de variables exógenas, más un ruido ( $W_{t \times w \times 1}$  error de medida).

---

<sup>15</sup> Rudolf Kalman en 1960 basándose en el método de mínimos cuadrados recursivos encuentra una solución para el filtrado de datos en modelos de estado-espacio.

## Ecuación 5

$$M_t = G_1 S_t + G_2 Y_t + W_t$$

$\{W_{t \times 1}\} : WN(0, \{R_t\})$  el vector  $W$  tiene media 0 y  $E(W_s, W_t') = \begin{cases} R_t & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$

$G_{1 \times v}$  es la matriz de parámetros relacionados con las variables de estado

$Y_{t \times 1}$  es el vector de  $z$  variables exógenas

$G_{2 \times z}$  es la matriz de parámetros relacionados con las variables exógenas

La segunda ecuación, está dada por la ecuación de estado o transición (ecuación 8), que relaciona el vector de variables no observadas con su valor anterior (proceso autorregresivo de orden uno), con variables exógenas, más un ruido (comportamiento estocástico del modelo que cambia en el tiempo).

## Ecuación 6

$$S_t = F_1 S_{t-1} + F_2 Z_t + V_t$$

$\{V_{t \times 1}\} : WN(0, \{Q_t\})$  el vector  $V$  tiene media 0 y  $E(V_s, V_t') = \begin{cases} Q_t & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$

$F_{1 \times v}$  es la matriz de parámetros relacionados con las variables de estado del período previo

$Z_{t \times 1}$  es el vector de  $z$  variables exógenas

$F_{2 \times z}$  es la matriz de parámetros relacionados con las variables exógenas

Además, el procedimiento se basa en el supuesto de que los errores del sistema, así como la información adicional que se incorpore al mismo presentan una distribución normal<sup>16</sup> de media cero y varianza determinada, los errores no están correlacionados entre sí, ni lo están con el estado inicial (ecuación 9).

---

<sup>16</sup> Este supuesto garantiza que la estimación del vector de estado sea insesgada.

## Ecuación 7

$$E(W_s, V_t') = 0 \quad \forall s \text{ y } t$$

$S_1$  esta incorrelacionado con todos los términos de los ruidos  $\{V_t\}$  y  $\{W_t\}$

Como fuera mencionado, el filtro de Kalman aplica un procedimiento recursivo en el cual se estima la variable de estado en función de valores iniciales y luego se retroalimenta por medio de datos observados. A las ecuaciones mediante las que se proyecta el estado en el momento  $t$ , tomando en cuenta la información del mismo en el momento  $t-1$  y la matriz de covarianzas del estado, se les denomina ecuaciones de predicción, ecuación 10. Mientras que el grupo de ecuaciones responsables de la retroalimentación del filtro se les denomina de actualización o corrección, ecuación 11. Las ecuaciones de actualización incorporan nueva información para llegar a una estimación mejorada del vector de estado.

## Ecuación 8

*Predicción del vector de estado:*

$$\hat{S}_t^* = F_1 \hat{S}_{t-1} + F_2 Z_t$$

*Predicción de la covarianza del error de predicción:*

$$P_t^* = F_1 P_{t-1} F_1^T + Q$$

## Ecuación 9

*Ganancia de Kalman:*

$$K_t = P_t^* G_1^T (G_1 P_t^* G_1^T + R)^{-1}$$

*Actualización de S utilizando la medida:*

$$\hat{S}_t = \hat{S}_t^* + K_t \left( M_t - G_1 \hat{S}_t^* \right) F_1 P_{t-1} F_1^T + Q$$

*Actualización de la covarianza del error:*

$$P_t = (I - K_t G_1) P_t^*$$

Para determinar los parámetros iniciales  $\hat{S}_0$  se define como un parámetro determinístico desconocido  $m$ , tal que  $\hat{S}_0 = m$ , de forma que los parámetros del modelo son  $(m, Q, R) = q$ , que son hallados maximizando su función de verosimilitud, para un Q dado<sup>17</sup>.

Los pasos requeridos para hallar los parámetros que maximizan la función de verosimilitud son los siguientes:

1. Para un Q dado,  $\hat{S}_0 = m$  y  $S_w^2 = V$ , obtener a través de la ecuación de predicción  $\hat{S}_t$ , y la predicción de la covarianza del error (P).
2. La segunda etapa corresponde a la corrección de la predicción y comienza con el cálculo de la ganancia de Kalman, factor de ponderación que minimiza la covarianza del error de la nueva predicción

<sup>17</sup> Dado que los errores se suponen que se distribuyen normalmente, también lo hará  $S_t$

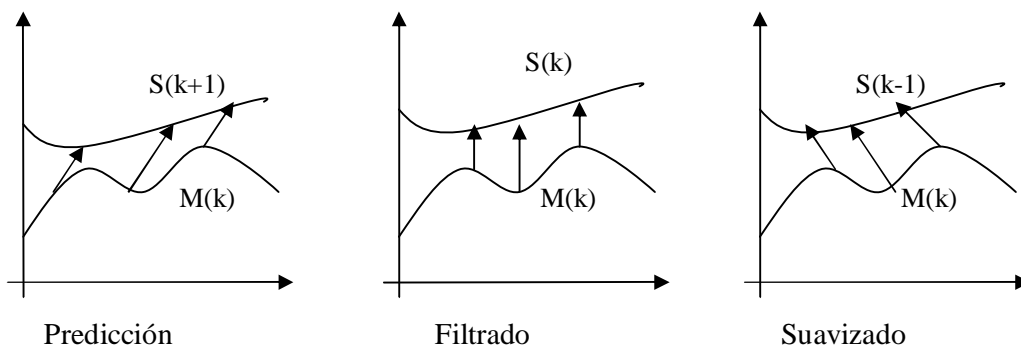
del vector de estado. La nueva predicción se genera adicionando a la predicción anterior dicha ganancia por el error cometido al proyectar el vector de estado utilizando la ecuación de medida. Por último se vuelve a calcular la covarianza del error de predicción.

Como resultado de la aplicación del filtro pueden obtenerse las siguientes estimaciones:

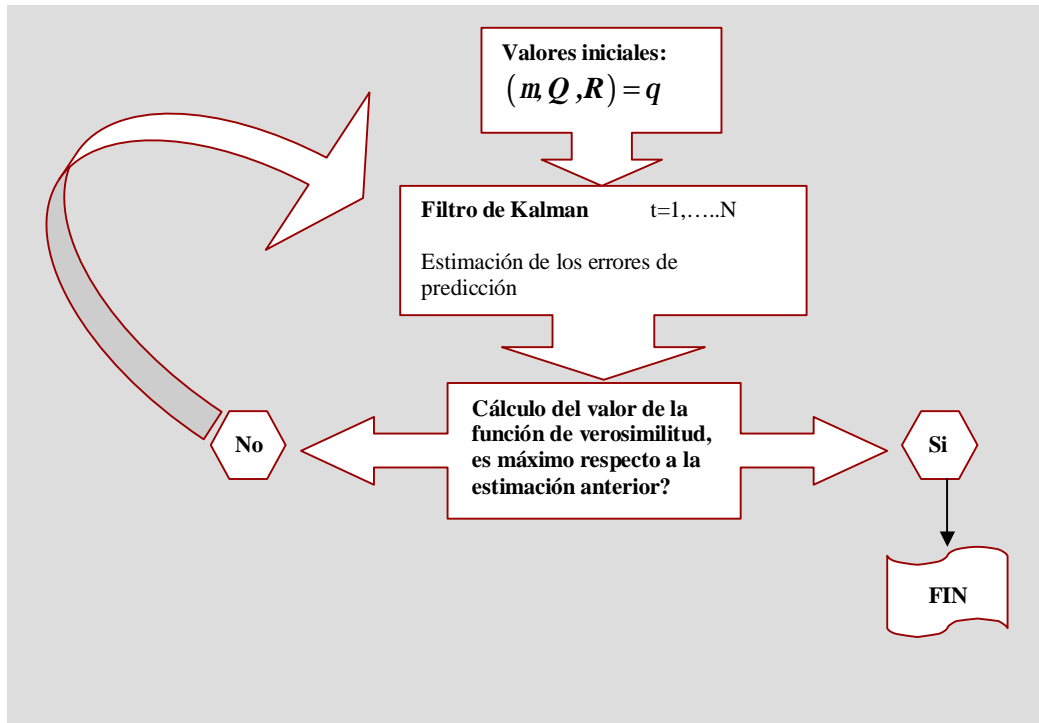
- ü **Predicción**, la estimación para el vector de estado en  $k+1$ , se obtiene tomando en cuenta las medidas de  $M(0), \dots, M(k)$ .
- ü **Filtrado**, refiere a la estimación del vector de estado en  $k$ , considerando la información de las medidas hasta  $k$ .
- ü **Suavizado**, con la información de las medidas hasta  $k$  estima el vector de estado hasta  $k-1$ .

A continuación se presenta, en la ilustración IV.2, un gráfico clarificador respecto a los distintos tipos de estimaciones, y en la IV.3, un esquema que sintetiza el procedimiento de optimización, extraídos de notas docentes del Departamento de Electrónica de la Universidad de Alcalá y del trabajo de Echevarría y otros (2005) respectivamente.

### Ilustración IV-2



### Ilustración IV-3



## IV.4 Relativizaciones a la estimación

A la hora de utilizar la estimación con fines de política económica, debe tenerse en cuenta una serie de limitaciones que presenta la misma, fundamentalmente debido al alto grado de incertidumbre relacionado con la especificación del modelo y con el problema de filtrado en tiempo real.

### ***Problemas relacionados con la especificación del modelo***

En lo que tiene que ver con la especificación del modelo que sirve de base para las estimaciones, una de las limitaciones que enfrenta es el hecho de no poseer un referente. Los parámetros son calibrados utilizando la estimación por MCO de las curvas de Phillips e IS, que se comportan de acuerdo a la teoría y replican bien los hechos estilizados. En la bibliografía consultada se utilizan los parámetros de los modelos semiestructurales de proyecciones trimestrales de los bancos centrales como

referencia. Se considera que en la medida que este tipo de modelos sean desarrollados para Uruguay se contaría con un punto de avance para la presente estimación.

Además, D Amato (2005) realiza una serie de críticas a la especificación de modelos neokeynesianos para estimar la TNI. Señala que las imperfecciones del mercado financiero hacen que existan diferencias entre la tasa natural de largo plazo y la suma descontada de las tasas de corto plazo esperadas.

Una de estas imperfecciones es el premio por el riesgo, en este sentido se considera que los hacedores de política deberían tener una idea de cómo éste riesgo es afectado por variaciones que se realicen en la tasa de política o en la tasa natural.

### ***Estimación en tiempo real***

Otro inconveniente que encuentran los hacedores de política en la utilización de este tipo de estimaciones es que no se conocen los valores de la tasa natural en tiempo real, esto es, cuando se tienen que tomar las decisiones de política.

Orphanides y Williams (2002) estiman este tipo de error, comparando las estimaciones realizadas en tiempo real ("*one-sided*") de aquellas suavizadas por el hecho de ser estimadas con retrospectiva ("*two-sided*"). En la literatura de los trabajos econométricos surge una serie estimada de la TNI variable en el tiempo que puede ser "*two-sided*", pero los hacedores de política cuentan con la desventaja de que deben de tomar su decisión basándose en estimaciones de la TNI realizadas con información disponible al momento, "*one-sided*".

Sin embargo, este tipo de problema es mayor en las estimaciones basadas en filtros univariados, altamente sensibles a la observación final. Estos filtros, como el HP, presentan el inconveniente de no ser buenos para distinguir entre las fluctuaciones seculares o las cíclicas, hasta que se cuenta con la información del dato siguiente, problema menos evidente en filtros multivariados. La metodología que se sigue comúnmente al aplicar los filtros univariados es proyectar la serie hacia delante y aplicar luego el filtro.

Al presentar los resultados, se ejemplifica gráficamente (gráfica 1 sección IV.7) las diferencias que se pueden suscitar entre las estimaciones, según sea la información que consideren de base.

Además, el hacedor de política para la utilización en tiempo y forma de este tipo de estimaciones se enfrenta a problemas de medición de las propias variables observables (que son sujetas a revisiones) y el hecho de que los valores estimados de los parámetros son afectados por toda la muestra.

### ***Problema de “pile-up”***

El problema denominado “*pile-up*” tiene que ver con el sesgo en las funciones de distribución de probabilidades de las variables no observables. Al intentar inferir desde series con varianzas mayores a las varianzas de las variables potenciales, se sesga la varianza de éstas últimas a cero.

Una de las formas de lidiar con este problema es imponer restricciones que tienen que ver con las relaciones entre la señal y el ruido. Como se desarrolla en la sección V.6, siguiendo a Mésonnier y Renne (2004), se fijaron dos ratios,  $g_1 = s_y / s_{y_0}$ , y  $g_2 = q_r / q_y$ .

Si  $g_1$  es muy grande, implica que la tasa de crecimiento del producto potencial es más volátil que la brecha producto, por lo cual en general se eligen valores menores que uno para este ratio. Por otra parte, si este ratio es cero, implica que la varianza del producto es nula. Como se puede observar en la ecuación 5, esto es equivalente a suponer que la tasa de interés natural y el producto potencial tienen las mismas fluctuaciones, dado que si  $e_t^y$  es cero, el único shock que reciben ambas variables es el que les transmite  $a_t$ . Por lo antedicho se testean valores mayores a 0 y menores o iguales a 1.

Por su parte,  $g_2$  representa cuánto de las fluctuaciones de baja frecuencia de la productividad son trasladadas a la tasa de interés natural en relación al producto potencial. El coeficiente  $q_r$  representa el grado de aversión al riesgo. Se testearon valores entre 1 y 20 para esta relación.

## IV.5 Variables que intervienen en el análisis

Antes de presentar la estimación del modelo, en el presente apartado se describen las variables incluidas en el modelo estimado, ver ilustración IV-5<sup>18</sup>.

Los datos son trimestrales y refieren al período comprendido entre 1992.0I y 2007.II<sup>19</sup>.

### Ilustración IV-4

NOMENCLATURA	SERIE
$y_t$	Logaritmo del producto interno bruto uruguayo (PIB, IVF base 85, fuente BCU) desestacionalizado (utilizando X-12-ARIMA).
$p_t$	Tasa de inflación anual, aproximada anualizando la diferencia del logaritmo del IPC base 85 core (sin considerar frutas, verduras, precios administrados, ni servicio domestico) promedio trimestral y multiplicando por 100.
$p_t^m$	Tasa de inflación anual de los bienes importados, aproximada anualizando la diferencia del logaritmo trimestral de la serie trimestral de precios de los bienes importados y multiplicando por 100.
$Dq_t$	Variación trimestral del tipo de cambio real multilateral.
$Dy_t^{US}$	Variación trimestral del PIB de EEUU desestacionalizado publicado por el Bureau of Economic Análisis
$Dc_t^A$	Variación trimestral del consumo argentino, fuente INDEC, desestacionalizado por medio del X-12-ARIMA
$i_t$	Promedio trimestral de tasa de interés call interbancaria nominal diaria hábil
<b>TI_bsyss</b>	Variación trimestral términos de intercambio de bienes y servicios, fuente BCU base 83, desestacionalizado por medio del X-12-ARIMA

<sup>18</sup> El análisis del comportamiento de cada una de las series involucradas, así como las transformaciones que fue necesario realizar para su utilización, se presentan en el anexo econométrico número 1 del documento de tesis.

<sup>19</sup> La variable que acota el período de análisis es la tasa call interbancaria, para comenzar en 1992, se digitaron los datos diarios hábiles anteriores al año 1994 que no existían en medios magnéticos, ampliando de esta forma la muestra hasta donde fue posible conseguir la información. Las series originales (que se transformarían en variaciones para introducirse en el modelo) se consideraron desde 1991.IV, para que la serie transformada pudiera partir de 1992.0I.

## IV.6 Estimación del modelo: filtro de Kalman

De la estimación uniecuacional, por medio del método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), de las curvas que representan la oferta y la demanda agregada de la economía<sup>20</sup>, surge la siguiente especificación del modelo presentado en la ecuación 5:

### Ecuación 10

1.  $\% \phi = a_1 \% \phi_{t-1} + a_2 \% \phi_{t-3} + a_3(1+L)\% \phi_{t-1} + a_5 DC_t^A + a_6 Dy_t^{US} + a_7 DTI_t + a_8 Dq_t + e_t^{\% \phi}$
2.  $\pi_t = b_1 \pi_{t-1} + b_3 \pi_{t-3} + b_4 \pi_{t-4} + b_5 \pi_t^m + b_6 \% \phi_{t-1} + e_t^{\pi}$
3.  $r_t^N = m_r + q_r a_t$
4.  $Dy_t^N = m_y + q_y a_t + e_t^y$
5.  $a_t = Y a_{t-1} + e_t^a$
6.  $y_t = y_t^N + \% \phi$
7.  $r_t = r_t^N + \% \rho = r_t^N + (i_t - p_{t+1/t} - r_t^N)$

*Siendo,*

*L el operador de rezagos*

*Variables no observables:  $a, r^N, y^N, \% \phi, \% \rho$*

*Variables observables:  $y, r, \pi$*

*Variables exógenas:  $DC^A, Dy^{US}, DTI, Dq, \pi^m$*

Seguidamente se presentan los pasos seguidos para transformar el modelo presentado en la ecuación 12 en la representación estado-espacio. La misma permitirá, para un conjunto inicial de parámetros, obtener los errores de predicción del modelo, que surgen de la aplicación del filtro de Kalman (ver ilustración IV.4), y que serán utilizados recursivamente en la función de verosimilitud hasta maximizarla.

<sup>20</sup> Al respecto, ver documento de anexo 2 de documento de tesis.

La primera ecuación de medida surge de las ecuaciones 4 y 6 del modelo:

### Ecuación 11

$$4. \quad \underbrace{Dy_t^N}_{y_t^N - y_{t-1}^N} = m_y + q_y a_t + e_t^y \Rightarrow 0 = -y_t^N + y_{t-1}^N + m_y + q_y a_t + e_t^y$$

*Sumando a ambos lados  $y_t$  y  $y_{t-1}$*

$$\underbrace{y_t + Dy_t}_{Dy_t} = -y_t^N + y_{t-1}^N + m_y + q_y a_t + e_t^y + y_t - y_{t-1}$$

Por 6.  $y_t = y_t^N + \mathcal{Y}_t$

$$\Rightarrow Dy_t = m_y + q_y a_t + \mathcal{Y}_t - \mathcal{Y}_{t-1} + e_t^y$$

De la ecuación 2 planteada en el modelo de la ecuación 12 surge la **segunda ecuación de medida**<sup>21</sup>.

### Ecuación 12

$$\pi_t = b_1 \pi_{t-1} + b_3 \pi_{t-3} + b_4 \pi_{t-4} + b_5 \pi_t^m + b_6 \mathcal{Y}_{t-1} + e_t^\pi$$

Las **ecuaciones de estado** o transición surgen de la ecuación 5 del modelo de la ecuación 12:  $a_t = Y a_{t-1} + e_t^a$  y de las siguientes operaciones para la despejar la ecuación asociada a la brecha producto:

---

<sup>21</sup> Las variables dummy no se incorporan en la ecuación para simplificar la presentación, además como se señala posteriormente, las mismas fueron modificándose en el proceso de calibración del modelo. Al incorporar una estimación de la brecha producto obtenida a través del filtro de Kalman, algunos de los shock fueron explicados por éste.

### Ecuación 13

$$1. \mathcal{Y}_t = a_1 \mathcal{Y}_{t-1} + a_2 \mathcal{Y}_{t-3} + a_3 (1+L) \mathcal{Y}_{t-1} + a_4 DC_t^A + a_5 Dy_t^{US} + a_6 DII_t + a_7 Dq_t + e_t^{\mathcal{Y}}$$

de la ecuación 7.  $r_t = r_t^N + \mathcal{Y}_t = r_t^N + (i_t - p_{t+1/t} - r_t^N) \Rightarrow$  *sustituyendo* :

$$\mathcal{Y}_t = a_1 \mathcal{Y}_{t-1} + a_2 \mathcal{Y}_{t-3} + a_3 (r_{t-1} - r_{t-1}^N) + a_3 (r_{t-1} - r_{t-2}^N) + a_4 DC_t^A + a_5 Dy_t^{US} + a_6 DII_t + a_7 Dq_t + e_t^{\mathcal{Y}}$$

de la ecuación 3.  $r_t^N = m_t + q_r a_t \Rightarrow$  *sustituyendo* :

$$\mathcal{Y}_t = a_1 \mathcal{Y}_{t-1} + a_2 \mathcal{Y}_{t-3} + a_3 r_{t-1} - a_3 (m_t + q_r a_{t-1}) + a_3 r_{t-2} - a_3 (m_t + q_r a_{t-2}) + a_4 DC_t^A + a_5 Dy_t^{US} + a_6 DII_t + a_7 Dq_t + e_t^{\mathcal{Y}}$$

*Operando*  $\Rightarrow$

$$\mathcal{Y}_t = a_1 \mathcal{Y}_{t-1} + a_2 \mathcal{Y}_{t-3} + a_3 r_{t-1} - 2a_3 m_t - a_3 q_r a_{t-1} + a_3 r_{t-2} - a_3 q_r a_{t-2} + a_4 DC_t^A + a_5 Dy_t^{US} + a_6 DII_t + a_7 Dq_t + e_t^{\mathcal{Y}}$$

La expresión de las **ecuaciones de medida** en su forma matricial es la que se presenta en la ecuación 16, donde se presenta la composición de las matrices presentadas de forma genérica en la ecuación 7:

### Ecuación 14

$$\begin{bmatrix} Dy_t \\ p_t \end{bmatrix}_{M_t} = \begin{bmatrix} q_y & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \end{bmatrix}_{G_1} \begin{bmatrix} a_t \\ a_{t-1} \\ \mathcal{Y}_t \\ y_t \\ \mathcal{Y}_t \\ y_{t-1} \\ \mathcal{Y}_t \\ y_{t-2} \end{bmatrix}_{S_t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & m_y \\ b_1 & b_2 & b_4 & b_5 & 0 \end{bmatrix}_{G_2} \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ p_{t-3} \\ p_{t-4} \\ p_t^m \\ 1 \end{bmatrix}_{Y_t} + \begin{bmatrix} e_t^y \\ e_t^p \end{bmatrix}_{W_t}$$

Por su parte, la ecuación 17 presenta las **ecuaciones de estado** en su forma matricial, composición de las matrices presentadas de forma genérica en la ecuación 8:

Ecuación 15

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_t \\ a_{t-1} \\ \% \\ y_t \\ \% \\ y_{t-1} \\ \% \\ y_{t-2} \\ \% \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 q_r & a_3 q_r & a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{t-1} \\ a_{t-2} \\ \% \\ y_{t-1} \\ \% \\ y_{t-2} \\ \% \\ y_{t-3} \\ \% \\ S_{t-1} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & -2a_3 m_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{t-1} \\ r_{t-2} \\ DC A_t \\ Dy^US_t \\ DTI_t \\ Dq_t \\ 1 \\ Z_t \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} e_t^a \\ 0 \\ e_t^y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{matrix} 123 \\ V_t \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Luego de calibrado el modelo a través de su estimación mediante equilibrios parciales se procedió a estimar los coeficientes que involucran a las variables latentes

aplicando el filtro de Kalman, programado en Eviews5, y Maquardt como algoritmo de optimización.

Como fuera señalado al presentar las relativizaciones a la estimación, la misma requiere fijar las relaciones entre la señal y el ruido para evitar el problema “*pile-up*”.

Los valores para  $g_1 = S_y/S_{\epsilon}$ , y  $g_2 = q_r/q_y$  fueron fijados siguiendo los criterios de Mésonnier y Renne (2004), a saber:

- ü En primer lugar se aplicó el test de Wald para valores de los ratios en los intervalos  $(\{g_1, g_2\} \hat{I} (0,1] \times [1,20])$  seleccionando aquellas combinaciones que tenían un “*p-value*” mayor a 25%.
- ü En segundo lugar, se tomó en cuenta la relevancia económica de los componentes inobservables y la significación de los parámetros más importantes del modelo
- ü El nivel alcanzado por la función de verosimilitud.

En función de éstos criterios fueron seleccionados  $g_1 = 0.001$  y  $g_2 = 1$ , valores que sirven de base para los resultados que se analizan a continuación. Posteriormente, en la gráfica 5 se presenta la sensibilidad de los resultados a variaciones en éstos ratios.

Los valores medios de las variables aproximadas por HP fueron los valores de inicio utilizados para el vector de estado<sup>22</sup>, la matriz de varianzas y covarianzas es inicializada en  $I_5 \times 0.5$ <sup>23</sup>. La varianza de  $a_t$  es fijada en 0.01.

Se procedió de forma iterativa re-estimando por MCO las curvas IS y de Phillips, utilizando la estimación obtenida por Kalman, para re-calibrar los parámetros.

Los coeficientes hallados y sus correspondientes probabilidades asociadas a la prueba  $z$ <sup>24</sup> se muestran en la tabla de la ilustración IV-6.

---

<sup>22</sup> Fueron testeados otros valores de inicio, pero no se encontró una importante sensibilidad de los resultados en este sentido y dado que éstos maximizaban la función de verosimilitud, fueron elegidos.

<sup>23</sup> Luego fue sustituida por otra que incrementaba la función de verosimilitud y que en la diagonal cuenta con las varianzas aproximadas de las variables utilizadas como proxy.

### Ilustración IV-5

Coeficiente	Estimación	Probabilidad
$m_y$	<b>0.74</b>	0.08
$q_y = q_r$	<b>1.05</b>	0.04
$b_6$	<b>0.36</b>	0.00
$s_p$	<b>2.80</b>	0.00
$Y$	<b>0.93</b>	0.00
$a_1$	<b>0.29</b>	0.10
$a_2$	<b>0.03</b>	0.78
$a_3$	<b>-0.11</b>	0.00
$m_r$	<b>3.54</b>	0.25
$s_{\%}$	<b>1.85</b>	0.00
$s_y$	<b>0.002</b>	0.00

<sup>24</sup> El estadístico z realiza la comparación entre la media hallada para la muestra y su valor poblacional, es el cociente de la diferencia entre la media muestral y la poblacional, sobre el desvío estándar. Este estadístico se compara con el valor de tablas, que calcula el área bajo la curva normal que existe entre la media y el estadístico z.

## IV.7 Resultados obtenidos

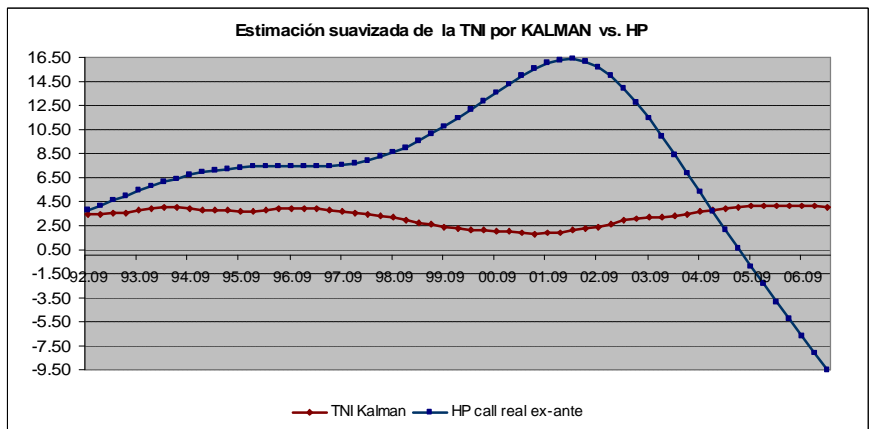
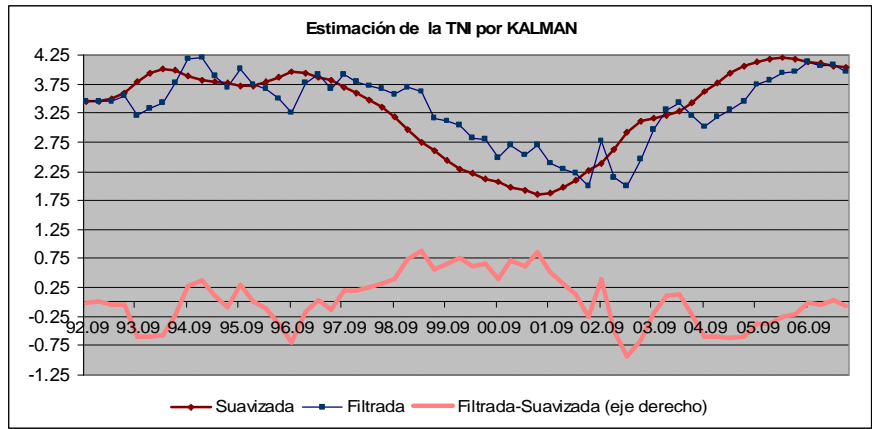
**Con respecto a los coeficientes estimados**, como puede observarse en la ilustración V.5., los parámetros relacionados a la transmisión de la política monetaria  $b_6$  y  $a_3$  resultan significativos. Cabe recordar que el coeficiente  $b_6$ , refleja el impacto de la brecha producto en la inflación del período inmediato posterior y su valor estimado es de 0.36. Por su parte la semielasticidad de la tasa de interés sobre la brecha producto,  $a_3$ , se estima en -0.11. Además, el coeficiente  $Y$  muestra el importante grado de persistencia de  $a_t$ . Sin embargo, los rezagos de la brecha producto en la curva IS estimada, no resultaron significativos, como tampoco lo hizo  $m_t$ <sup>25</sup>.

**Las estimaciones de la TNI resultantes**, se presentan en la gráfica 1, suavizadas (“*two side*” considerando la información de toda la muestra), filtrada (en tiempo real), y la diferencia entre ambas. El valor promedio en el período considerado de la estimación suavizada fue de 3.31%. Sin embargo, pueden distinguirse 3 fases marcadas en su evolución. La primera fase culmina en el año 1998, hasta ese momento había oscilado en torno al 3.75%. A partir de dicho año comienza a descender, alcanzando un mínimo de 1,84% a mediados de 2001. En este mínimo, es que se produce la mayor discrepancia entre la estimación suavizada y lo que sería la estimación en tiempo real, dado que la primera, bajo el conocimiento de toda la información muestral, anticipa la crisis del año 2002. Sobre fines de 2003, podría decirse que comienza la tercera etapa, en que la TNI retorna a valores superiores al 3%, estimándose el promedio suavizado de los últimos 3 años considerados en 3.98%.

---

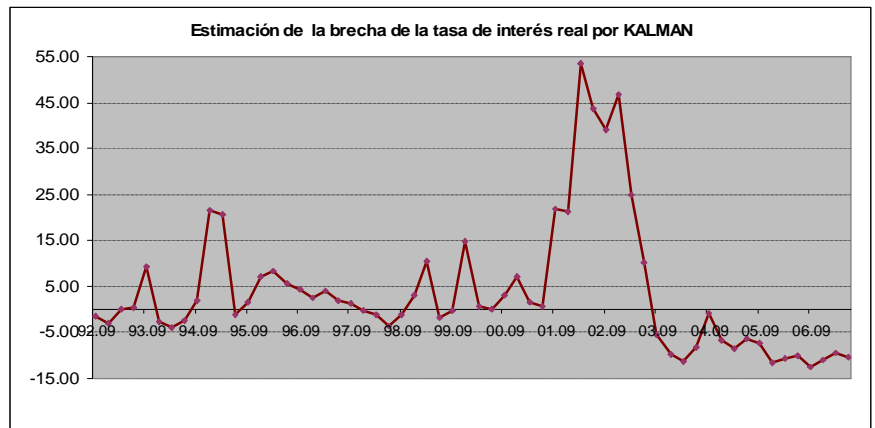
<sup>25</sup> Este último tampoco fue significativo en el caso colombiano, pero su valor es similar al hallado en otros países.

**Gráficas 1.a y 1.b**



Como resultado de la estimación analizada, se extrae el siguiente **comportamiento de la brecha de la tasa de interés:**

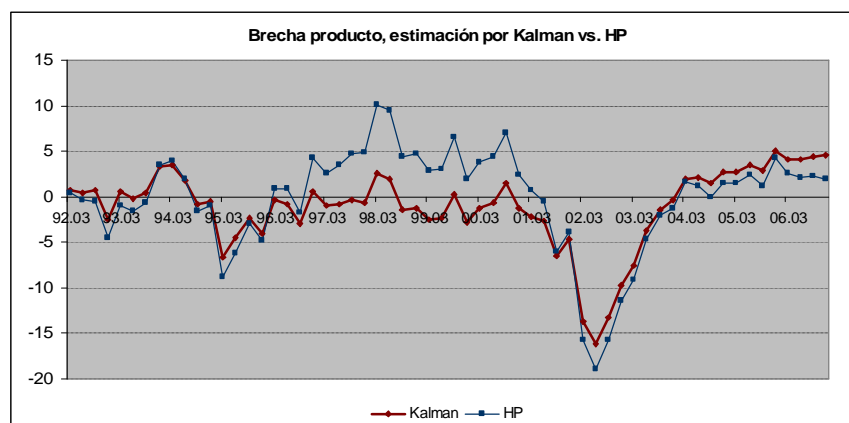
**Gráfica 2**



Hasta el tercer trimestre de 2001, la tasa real de interés, oscila alrededor de su valor de equilibrio, alcanzando las mayores discrepancias en los períodos de crisis. Durante la crisis del año 2002, la brecha adquiere sus valores máximos, lo que se encuentra en línea con la envergadura de la circunstancia por la que atravesara la economía uruguaya. A la salida de la crisis, la brecha desciende rápidamente, alcanzando valores negativos a mediados de 2003 y comenzando a equilibrarse hacia el tercer trimestre de 2004. Sin embargo, a partir de entonces, del análisis gráfico y considerando exclusivamente este indicador, se concluye que la instancia monetaria ha sido expansiva. La brecha de la tasa de interés ha sido crecientemente negativa, reflejo del comportamiento de la tasa de interés interbancaria. Dicha tasa, se mantuvo relativamente estable, no acompañando el crecimiento evidenciado en la estimación de la tasa de equilibrio.

**Respecto a la brecha producto**, cuya estimación surge de manera conjunta con la TNI, puede decirse que replica los hechos estilizados de la economía uruguaya en el período considerado.

**Gráfica 3**

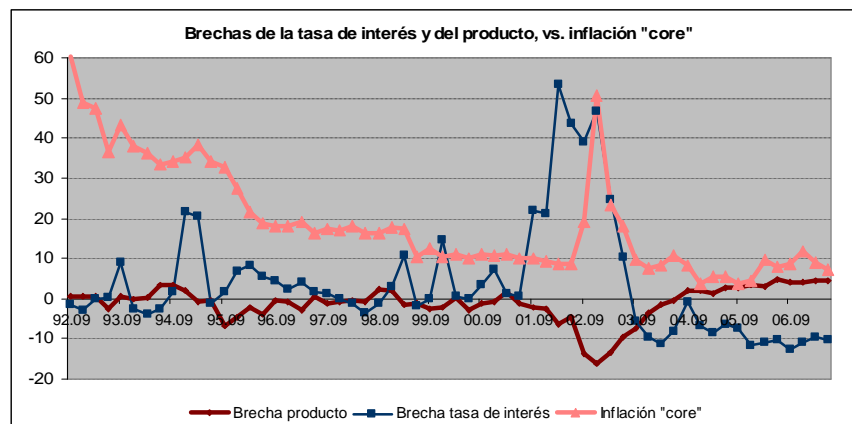


Esta aproximación, difiere de la realizada por HP, en que esta última por tratarse de un filtro estadístico univariado, no toma en cuenta el comportamiento de las otras variables del modelo. La mayor discrepancia entre ambas estimaciones se verifica entre el 1997 y 2001, evidenciando el comportamiento del producto potencial. El modelo estima que este último, al igual que el producto, creció en la época mencionada y cayó durante la crisis, lo que explica que el mínimo que alcanza la brecha producto estimada por Kalman sea menor en valor absoluto que el estimado por HP. En la última parte del período analizado, nuevamente se estima que la

recuperación del producto potencial no fue tan acelerada como la que evidenció el producto, por lo cual el recalentamiento estimado por Kalman es mayor.

**La relación entre las brechas de la tasa de interés y de la brecha producto, y la evolución de la inflación** se expone en la gráfica 4:

**Gráfica 4**



En la gráfica es clara la relación inversa que existe entre la brecha de la tasa de interés y la brecha producto, tal como prevé la teoría. Por su parte, si bien existieron otros factores que explicaron el comportamiento de la inflación, alguno de ellos expresados como variables explicativas del mismo en el modelo, la brecha producto guarda una relación directa con la inflación, a excepción del período de crisis en que el signo de la relación se invierte.

En lo que tiene que ver con **los resultados hallados y su relación con los antecedentes recopilados para otros países**, cabe mencionar que el nivel promedio estimado para la TNI, es mayor al encontrado para los países en desarrollo, pero se encuentra en línea con el nivel promedio estimado para los países de América Latina estudiados (Colombia, Chile, Perú, Venezuela), quienes reportan resultados que oscilan entre 4 y 5%.

En la ilustración IV-7, se relaciona la estimación realizada para Uruguay con lo hallado por Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica y Venezuela, a través de un cuadro

que resume algunas estadísticas descriptivas referentes a las estimaciones realizadas por cada país, para el período comprendido entre 1996.I y 2006.IV.

#### Ilustración IV-6

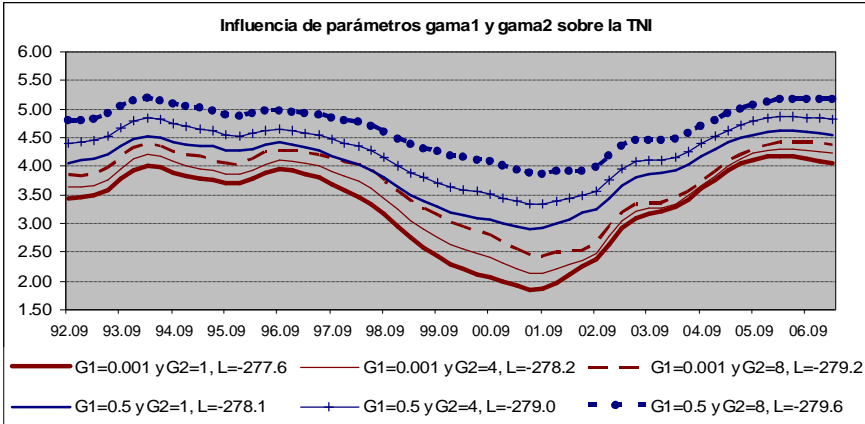
Estadísticas descriptivas	Brasil	Chile	Colombia	Costa Rica	Uruguay	Venezuela
Media	0.018	0.030	0.041	0.031	0.031	0.062
Mediana	0.014	0.029	0.045	0.031	0.033	0.052
Máximo	0.045	0.055	0.096	0.035	0.042	0.143
Mínimo	-0.003	0.020	-0.003	0.029	0.019	0.016
Desvío estándar	0.014	0.009	0.032	0.002	0.008	0.035
Skewness	0.701	0.856	0.007	0.400	-0.259	0.757
Kurtosis	2.140	3.148	1.496	1.760	1.609	2.646
Jarque-Bera	4.963	5.411	3.772	3.994	4.043	4.431
Probability	0.084	0.067	0.152	0.136	0.133	0.109
Nro. observaciones	44	44	40	44	44	44

**Fuente:** Elaboración propia tomando en cuenta el cuadro presentado por Rodrigo Fuentes (del Banco Central de Chile) en la 12ª Reunión de la Red de Investigadores de Bancos Centrales que tuvo lugar en Madrid en Noviembre 2007.

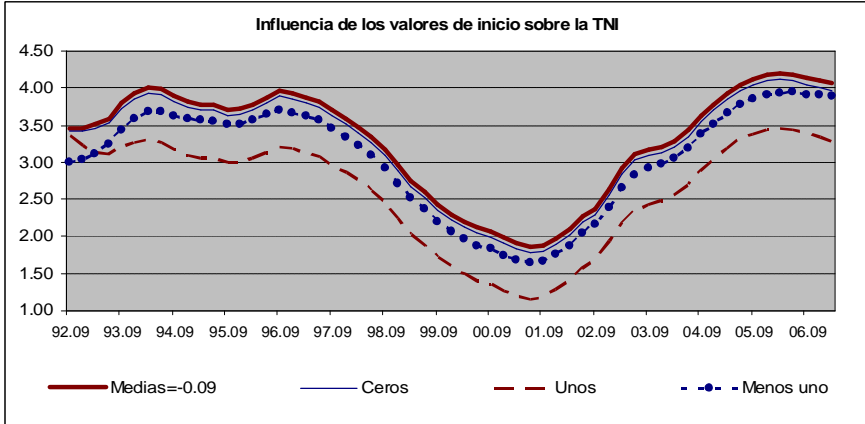
Para culminar, en la gráfica 5, se expone el grado de sensibilidad que de la estimación de la TNI a cambios en  $g_1$  y  $g_2$ , y en la 6 a variaciones en los valores de inicio utilizados, aunque por los motivos expuestos anteriormente la estimación

seleccionada para el análisis realizado refiere a  $g_1 = 0.001$  y  $g_2 = 1$ , y valores de inicio para los coeficientes iguales a sus medias.

**Gráfica 5**



**Gráfica 6**



## V. CONCLUSIONES

Este documento abordó el tema de la tasa natural de interés (TNI), tanto desde un punto de vista teórico, como empírico, constituyéndose en la primera estimación realizada para la economía uruguaya.

La motivación del trabajo fue encontrar un indicador métrico de la instancia de política monetaria, que se adecuara con el actual régimen de política. Desde julio de 2007, el BCU instauró un régimen de política monetaria que utiliza como instrumento operacional a la tasa de interés de corto plazo. Esta decisión, está en línea con lo que ha sido la tendencia mundial de los bancos centrales. Bajo el nuevo paradigma, la tasa de interés se ha convertido en el instrumento de política monetaria por excelencia y la TNI en su indicador de referencia. Pero para el caso uruguayo, no existían documentos que analizaran cuál era el nivel del instrumento elegido que era neutral a los precios, ni habían sido publicadas evaluaciones de las instancias de política monetaria en términos del mismo, que permitieran analizar su desempeño respecto al objetivo final, la estabilidad de precios.

La investigación comenzó analizando el concepto de la tasa de interés de equilibrio para encontrar una forma de aproximarse empíricamente al mismo, dado que se trata de un fenómeno no observable. Además, se sistematizaron los trabajos empíricos que se hallaron al respecto.

La metodología de medición elegida se basó en la aplicación del filtro de Kalman y en la utilización de un algoritmo de optimización sobre un modelo semiestructural pequeño, que representa la economía uruguaya. Se estimó la TNI para el período 1992.I a 2007.II.

La estimación suavizada de la tasa natural se ubica en promedio, sin considerar los años 2001 y 2002 en que alcanza sus valores mínimos, alrededor del 3,5%. En este sentido, si se consideran los últimos 3 años del período de análisis éste promedio se eleva al 4%. Nivel que se encuentra en línea con lo reportado por los trabajos realizados para otros países de América Latina.

Como subproducto de dicha estimación, se obtuvo la brecha producto, dado que el modelo relaciona la evolución de baja frecuencia de esta variable con la de la

tasa de equilibrio. La brecha producto estimada, replica los hechos estilizados de la economía uruguaya, lo que otorga un grado de confianza, adicional al determinado por los criterios estadísticos, acerca de la representatividad del modelo utilizado.

Por otra parte, para evaluar las instancias de política monetaria que fueron llevadas a cabo en el período de estudio, se construyó la brecha de la tasa de interés. En función del análisis realizado, surge que desde fines de 2004 y hasta la puesta en marcha de la nueva política en 2007, la instancia monetaria ha sido crecientemente expansiva, comportamiento que fue acompañado de una brecha del producto positiva y concomitantes aumentos en el nivel de precios.

Sin embargo, en lo que tiene que ver con la utilización de estas estimaciones para propósitos de política, debe tenerse en cuenta las limitaciones que presenta el análisis y que son abordadas en el cuerpo del documento. En este sentido, cabe mencionar, que si bien no encuentran grandes críticas al ser utilizadas para evaluar las instancias monetarias expuestas, las estimaciones en tiempo real deben ser utilizadas con cautela. Las estimaciones filtradas (con información hasta  $t$ ) difieren en hasta 90 puntos básicos de las suavizadas (considerando toda la información muestral).

Finalmente, se considera que la investigación ha cumplido con el objetivo de contribuir, en uno de los puntos en discusión de la política monetaria uruguaya, sobre el cual se abren caminos de investigación a recorrer. En primer lugar, se considera importante avanzar en la construcción de un modelo semiestructural más sofisticado para representar la economía uruguaya, por ejemplo a través de fundamentos microeconómicos, y elementos *forward-looking*. En segundo lugar, se cree que a medida que se cuente con mayor información, será posible realizar una mejor y más completa estimación, reduciéndose la influencia del gran shock que significó la crisis de 2002, en todas las variables y en su relacionamiento. Además, la puesta en práctica de la política seguramente produzca cambios en los canales de transmisión de la misma, que en la medida que puedan ser incorporados enriquecerán el análisis.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

**Aboal D., Lorenzo F., Noya N. (2002)**, "La inflación como objetivo en Uruguay: Consideraciones sobre los mecanismos de transmisión de la política monetaria y cambiaria", Revista de Economía del BCU, Vol. 10 N°1, Segunda Epoca, BCU.

**Amato J (2005)**, "The role of the natural rate of interest in monetary policy", BIS, WP 171.

**Benati L. y Vitale G. (2007)**, "Joint estimation of the natural rate of interest, the natural rate of unemployment, expected inflation and the potential output", European Central Bank, W.P. 797.

**Bucacos E., Licandro G. (2003 )**, "La demanda de dinero en Uruguay: 1980:01 2002:04", Revista de Economía, Vol.10 N°2, Segunda Epoca, BCU.

**Brockwell P.J. y Davis R. A. (1996)**, "Introduction to Time Series and Forecasting", Springer Text in Statistics.

**Carbajal F., Lanzilotta B., Llambi C. y Velázquez C. (2007)**, "La brecha producto para Uruguay: metodologías para su estimación y aplicaciones", CINVE, <http://www.bcu.gub.uy/autoriza/peiees/jor/2007/iees03j3180807.pdf>.

**Clar M., Ramos R. y Suriñach J. (1998)**, "A latent variable model to measure regional manufacturing production in Spain", 38<sup>th</sup> Congress of the European Regional Science Association, Viena.

**Crespo J., Gnan E. y Ritzberger-Gruenwald D. (2003)**, "Searching for the natural rate of interest" A Euro-Area perspective, Oesterreichische Nationalbank, WP 84.

**Calderon C. y Gallego F. (2002)**, "La tasa de interés real neutral en Chile, Banco Central de Chile, Volumen 5, N 2.

**Cartaya V. , Fleitas C., Vivas J. (2007)**, "Midiendo la tasa natural de interés en Venezuela", Banco Central de Venezuela.

**Castillo P., Montoso C. y Tuesta V. (2006)**, “Estimación de la tasa natural de interés para la economía peruana”, Banco Central de la Reserva del Perú.

**Clark T. y Kozicki S. (2004)**, “Estimating equilibrium real interest rates in real-times”, Deutsche Bundesbank, W.P. 32/2004.

**Durbin J. y Koopman S. (1998)**, “Fast filtering and smoothing for multivariate state space models”, Center for Economic Reserarch.

**Durbin J. y Koopman S. (2003)**, “Time series analysis by state space methods”, Oxford Statistical Science Series.

**Echevarría J., López E., Misas M., Tellez J., Parra J. (2006)**, “La tasa de interés natural en Colombia”, Banco de la Republica.

**Garnier J. y Wilhelmsen B. (2005)**, “The natural real interest rate and the output gap in the Euro Area. A joint estimation”, European Central Bank, W.P. 546.

**Giammarioli N. y Valla N. (2003)**, “The natural real rate of interest in the Euro Area.”, European Central Bank, W.P. 233.

**Harvey C. (1989)**, “Forecasting, structural time series models and the Kalman filter”, Cambridge University Press.

**Kalman R. (1960)**, “A new approach to linear filtering and prediction problems”, Research Institute for Advanced Study, Baltimore, papper transcripto por John Lukesh a modo electronico, disponible en <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/media/pdf/Kalman1960.pdf>.

**Laubach T. y Williams J. (2001)**, “Measuring the natural rate of interest”, Board of Governors of the Federal Reserve System.

**Luque J. y Vega M. (2002)**, “Usando un modelo semi-estructural de pequeña escala para hacer proyecciones: Algunas consideraciones”, Estudios Económicos, Banco Central del Perú.

**Loayza N. y Schmidt-Hebbel K. (2002)**, "Monetary policy functions and transmission mechanisms: An overview", en Monetary Policy: Rules and Transmission Mechanisms, editado por Loayza y Schmidt-Hebbel, Banco Central de Chile.

**Manrique M., Márquez J. (2004)**, "Una aproximación empírica a la tasa natural de interés y el crecimiento potencial", Banco de España, W.P. 0416.

**Mésonnier J. y Renne J. (2004)**, "A time-varying "natural" rate of interest for the Euro Area", Banque de France.

**Mésonnier J. y Renne J. (2007)**, "Does uncertainty make a time-varying natural rate of interest irrelevant for the conduct of monetary policy?", Banque de France, NER E#175.

**Orphanides A. y Williams J. (2002)**, "Robust monetary policy rules with unknown natural rates", Brookings Panel on Economy Activity, JEL: E52.

**Peña D., Tiao G. Y Tsay R. (2001)**, "A course in time series analysis", Wiley Series in Probability and Statistics Section.

**Tristani O. (2007)**, "Model misspecification, the equilibrium natural interest rate and de equity premium", European Central Bank, W.P. 808.

**Wintr L., Guarde P. y Rouabah A. (2005)**, "Estimating the natural interest rate for the Euro Area and Luxembourg", Banque Centrale du Luxembourg, W.P. 15.

**Woodford M. (2003)**, "Interest and Prices", Princeton University Press.