

# ANÁLISIS DE RECURRENCIA VISUAL

## Dinámica caótica en los Mercados de Valores mundiales

Diego G. Fernández \*

Primera Versión  
Setiembre 2012

### Resumen

Como plantea Grau Carles, “el comportamiento económico es complejo, irregular y no lineal. El objetivo de la ciencia económica es desvelar la naturaleza irregular y complicada del fenómeno económico. Los modelos empíricos de análisis de series temporales han sido tradicionalmente lineales. La simplicidad de las herramientas para el análisis empírico ha sido el principal argumento a favor de la linealidad. Pero teóricamente es difícilmente justificable que el fenómeno económico siga un comportamiento lineal. El estudio de la no linealidad es complejo pero se hace necesario en la economía, por lo tanto es indispensable que se introduzcan conceptos e instrumentos nuevos relacionadas con la no linealidad”.

Este artículo constituye un primer paso en el estudio del comportamiento caótico de los principales mercados de valores a nivel internacional y, en especial, de Uruguay mediante indicadores bursátiles de frecuencia diaria. Luego de aplicar distintas técnicas y métodos como el Análisis Gráfico, Análisis de Recurrencia y Entropía de Espacio Temporal, los resultados apoyan la hipótesis de que las series se comportan de forma caótica.

Esta conclusión le da validez al uso de técnicas de predicción no lineales. Se muestra el altísimo poder predictivo del Análisis de Recurrencia Visual. Los resultados encontrados en ese trabajo abren la puerta a futuras investigaciones para el análisis de la dinámica de las series temporales de la economía de Uruguay.

**Palabras clave:** dinámica caótica, comportamiento irregular, entropía, Análisis recurrencia visual, mercado de valores, Uruguay.

**Clasificación JEL:** G10, G14, G15

---

\* Licenciado en Economía. Investigador Estadístico Independiente. Analista económico Asesoría Económica – Departamento Sector Externo - Banco Central del Uruguay [diferandez@bcu.gub.uy](mailto:diferandez@bcu.gub.uy)  
Las opiniones y posibles errores u omisiones son responsabilidad exclusiva del autor y no representan necesariamente al Banco Central Del Uruguay.

## 1. Introducción

Como plantea la Dra. Grau Carles, “el comportamiento económico es complejo, irregular y no lineal. El objetivo de la ciencia económica es desvelar la naturaleza irregular y complicada del fenómeno económico. Los modelos empíricos de análisis de series temporales han sido tradicionalmente lineales. La simplicidad de las herramientas para el análisis empírico ha sido el principal argumento a favor de la linealidad. Pero teóricamente es difícilmente justificable que el fenómeno económico siga un comportamiento lineal. El estudio de la no linealidad es complejo pero se hace necesario en la economía, por lo tanto es indispensable que se introduzcan conceptos e instrumentos nuevos relacionadas con la no linealidad”.

La mayoría de las series económicas y financieras, en particular, presentan un comportamiento aleatorio siendo en general muy difícil predecir su dinámica. El surgimiento de la teoría caótica y su estudio en campos como la física, la biología y la química ha permitido obtener resultados que sugieren que ésta se puede aplicar también en temas económicos.

Liu, Granger y Heller (1993) concluyen que un sistema determinista no lineal puede generar una serie que tenga la apariencia de aleatoria y por tanto sea imposible detectar su naturaleza determinista por técnicas de identificación lineales.

Los modelos dinámicos estocásticos no lineales, que generan comportamientos caóticos, parecen ser apropiados para el estudio de la dinámica económica ya que están descritos por funciones no lineales que relacionan valores presentes y pasados de las variables y, además, incluyen también shocks externos, es decir, que los movimientos de las variables dependen de su historia y de impulsos estocásticos.

Únicamente mediante sistemas no lineales se puede reflejar la complejidad de la economía, que pasa de estados de equilibrio, estables o inestables, así como a comportamientos aparentemente aleatorios, pero generados por sistemas deterministas, es decir, comportamientos caóticos.

La teoría del caos estudia lo complicado, lo impredecible, lo que no es lineal y, básicamente, consiste en que en determinados sistemas, pequeños cambios en las condiciones iniciales conducen a enormes divergencias en los resultados finales (efecto mariposa).

Si la dinámica de la economía se confirma como caótica, el objetivo es buscar pautas dentro del comportamiento complejo que permitan la predicción en períodos de tiempo cortos. No serán posibles predicciones para períodos de tiempo largos, ya que una de las principales características de un sistema que sigue un comportamiento caótico es la dependencia de las condiciones iniciales, es decir, que cualquier pequeña divergencia en la consideración de las mismas se amplifica exponencialmente en el proceso dinámico.

Los mercados de valores parecen indicados para el estudio caótico porque las fluctuaciones en los mercados son en general inesperadas y parecen más aleatorias que las fluctuaciones de otras variables económicas. Otra característica es que se dispone de series largas de frecuencia diaria que es apropiado para la técnica que se utiliza en este trabajo.

Dado lo anterior en este estudio se va a analizar la dinámica caótica de los principales mercados de valores a nivel internacional, incluido Uruguay, mediante la aplicación del Análisis de Recurrencia Visual.

Como antecedentes sobre los cuales se basó esta investigación podemos encontrar el trabajo de Espinosa 2008 y la tesis doctoral de Grau Carles 1996.

En el trabajo de Espinosa se estudia los mercados bursátiles latinoamericanos mediante el análisis de recurrencia visual. A diferencia del trabajo de Espinosa en este trabajo se busca realizar un estudio más completo de las herramientas más conocidas para la detección de la dinámica caótica de una serie temporal y por otro lado se va a utilizar el potencial predictivo de la técnica que en Espinosa no se utiliza.

Por otro lado la Dra Grau Carles analiza la dinámica caótica en el mercado de valores de España pero no utiliza el análisis de recurrencia visual. Sin embargo en dicha tesis doctoral se plantean otras técnicas que son utilizadas en esta investigación como ser los exponentes de Hurst y Lyapunov entre otras.

Los aportes principales de este artículo son:

- Se realiza un resumen divulgativo a nivel teórico de las principales herramientas disponibles para la detección de comportamiento caótico en series de tiempo.
- El análisis constituye un primer paso en el estudio del comportamiento caótico de series de frecuencia diaria, en especial para la economía uruguaya;
- Se analizan series de frecuencia diaria en el período enero 2008 – agosto 2012 lo cual permitirá estudiar como se comportaron los mercados de valores a lo largo de la Crisis Financiera global cuyos efectos y consecuencias están aún lejos de terminar.
- Se introduce un análisis no paramétrico basado en el análisis de recurrencia lineal para la predicción de una serie de tiempo.

Dado lo anterior este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la primera sección se describe brevemente las características principales de la denominada Teoría del Caos y algunas herramientas que permiten determinar la dinámica caótica de una serie temporal. En la segunda sección se describen los datos y series de indicadores bursátiles a utilizar y se estudia el comportamiento caótico o no de cada serie. En la tercera sección se presenta el Análisis de Recurrencia Visual y su aplicación a las series de indicadores bursátiles. Finalmente en la cuarta sección se presentan las reflexiones finales del trabajo a modo de conclusión.

# 1. LA MATEMÁTICA DEL CAOS

En esta sección se plantean algunos conceptos de la Matemática del Caos que resultan fundamentales para entender este trabajo de investigación<sup>1</sup>. La matemática del caos, es decir, el conjunto de herramientas que tienen como objeto de estudio los sistemas caóticos, constituye una alternativa al análisis estadístico o probabilístico de los fenómenos que se comportan de manera compleja o no regular.

El estudio de los sistemas caóticos se justifica por la existencia de un gran número de fenómenos de la realidad que presentan una evolución temporal aparentemente aleatoria, irregular, aperiódica y escasamente predecible. Estos sistemas se caracterizan por tres propiedades principales:

- a) Son procesos dinámicos no lineales, es decir, presentan retroalimentación entre sus variables de estado con desfase temporal no lineal.
- b) Las soluciones a estos sistemas dinámicos no lineales presentan una elevada irregularidad y aperiodicidad.
- c) Son sistemas con una dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

## 1.1 Definición de caos

En la literatura existen diferentes definiciones de caos. Una primera definición intuitiva que resume el comportamiento caótico es fue sugerida en Londres (1986): “comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista”.<sup>2</sup> Es decir, un sistema caótico parece aleatorio y muy irregular, pero se genera a través de un proceso determinista. Además, aunque hayamos acumulado gran cantidad de datos sobre el comportamiento pasado del sistema, no podemos realizar predicciones exactas acerca del comportamiento futuro del mismo.

Devaney (1984)<sup>3</sup> define de forma rigurosa y matemática una función caótica:

Sea  $V$  un conjunto. Se dice que una función  $f: V \rightarrow V$  es caótica si:

1.  $f$  es sensible a las condiciones iniciales
2.  $f$  es topológicamente transitiva
3. los puntos periódicos son densos en  $V$

El primer punto se basa en la dependencia de las condiciones iniciales. Se dice que una función  $f: J \rightarrow J$  tiene dependencia de las condiciones iniciales si existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in J$  y cualquier vecindad  $N$  de  $x$ , existe un  $y \in N$  y un  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

Esto significa que si una función tiene dependencia de las condiciones iniciales podemos tomar puntos arbitrariamente cercanos a  $x$ , de forma que después de varias iteraciones de  $f$ , éstos se separan en al menos un valor positivo  $\delta$ . Por lo tanto un error en una de las condiciones iniciales de un sistema caótico se amplifica a lo largo de sucesivas iteraciones, lo

---

<sup>1</sup> Se agradece la colaboración y autorización de la Dra Grau Carles por la utilización del material bibliográfico presentado en su tesis de doctorado.

<sup>2</sup> Definición sugerida en (1986) en una conferencia sobre el caos en la Real Sociedad.

<sup>3</sup> Devaney, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley 1984. Pag 50.

que implica que en este tipo de sistemas sólo se pueden realizar predicciones mínimamente fiables para períodos relativamente cortos.

El segundo punto es la transitividad topológica llamada también mezclado. Se dice que una función  $f : J \rightarrow J$  es topológicamente transitiva si para cualquier par de conjuntos abiertos  $U$  y  $V \subset J$  existe un  $k > 0$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ . Esto equivale a decir que siempre podemos encontrar condiciones iniciales de  $U$  que después de iteradas conduzcan a elementos de  $V$ , sean cuales sean estos conjuntos  $U$  y  $V$ .

El tercer punto enuncia que el sistema debe tener puntos periódicos densos en  $V$ . Es decir, que para cualquier condición inicial  $v_0$ , existe siempre otra condición inicial  $z_0$  que está a una distancia arbitrariamente cercana a  $v_0$  y que además es periódica.

Resumiendo las tres condiciones podemos afirmar que para que un sistema sea caótico debe mostrar impredecibilidad, inseparabilidad y recurrencia. La impredecibilidad proviene de la dependencia respecto a las condiciones iniciales, la inseparabilidad tiene su origen en la transitividad topológica y la recurrencia aparece debido a los puntos periódicos.

## 1.2 La detección del caos a partir de series temporales

En la literatura específica de la matemática del caos se han ido desarrollando distintas técnicas más o menos sofisticadas para el análisis de las series temporales que no requieren de la aplicación directa de los teoremas que desde el punto de vista teórico caracterizan a los sistemas dinámicos con comportamiento caótico.

La matemática del caos constituye una alternativa al análisis estadístico o probabilístico de los fenómenos que se comportan de manera compleja o no regular. Precisamente, el estudio de los sistemas caóticos se justifica por la existencia de un gran número de fenómenos de la realidad que presentan una evolución temporal aparentemente aleatoria, irregular, aperiódica, escasamente predecible, y por lo tanto, potencialmente caóticas – fenómenos regidos por modelos perfectamente deterministas y estructuralmente simples -. La necesidad de disponer de algún método para la detección de comportamientos caóticos en la dinámica subyacente a una serie temporal resulta especialmente importante en las ciencias sociales, como la economía, en las que la imposibilidad de realizar experimentos controlados sobre el comportamiento humano, impide el perfecto conocimiento de las leyes que rigen el funcionamiento de la realidad social que nos rodea.

Por lo tanto, la posibilidad de detectar comportamientos deterministas – caóticos o no -, o estocásticos – lineales o no – resulta de especial interés no sólo para justificar el uso de uno u otro tipo de modelos para la representación de las series temporales, sino adicionalmente como un incentivo adicional para seguir profundizando en el estudio de la estructura subyacente de los fenómenos estudiados – si el sistema es aparentemente aleatorio pero como consecuencia de su comportamiento caótico determinista, entonces se debería intentar aprovechar la capacidad potencial de este tipo de sistemas dinámicos para explicar las regularidades de carácter cualitativo de la evolución temporal observada en las series históricas económicas. La certeza, o simplemente la presunción o evidencia débil, de la existencia de comportamientos caóticos en una serie temporal resulta también interesante para mejorar las predicciones sobre su evolución futura – por ejemplo usando los métodos de predicción por analogías -. A su vez, la presencia de caos en las series temporales obligaría al abandono de la aproximación lineal

como simplificación de la realidad, por su excesivo reduccionismo paralizante, a la hora de la construcción de modelos para explicar el funcionamiento de los fenómenos observados en la realidad, forzando a la construcción, por el contrario, de modelos teóricos o no lineales que, aunque estructuralmente simples, sean capaces de generar comportamientos caóticos.

El análisis de si una serie de datos es aleatoria o presenta por el contrario caos determinista se traduce en investigar si sus elementos pueden considerarse muestreados en las trayectorias de un sistema determinista desconocido cuya dinámica converja a un atractor extraño. Es decir, se trata de analizar una serie temporal asumiendo que ésta es una muestra observable de la trayectoria que describe la solución de un sistema dinámico. Se trata de discriminar entre las dos posibles fuentes de complejidad: comportamientos puramente estocásticos o comportamientos deterministas de dinámica compleja.

### **1.2.1 ¿Cómo diagnosticar la presencia de caos a partir de una serie temporal?**

Entre las técnicas debemos distinguir entre dos grandes grupos, aquellas que podríamos resumir en que se basan en un análisis gráfico y estadístico tradicional de series temporales, y aquellas otras que tratan de cuantificar ciertas propiedades inherentes a las series con comportamiento caótico.

Una primera característica que debemos observar en la serie temporal si ésta procede de un sistema caótico determinista será una evolución temporal errática y aperiódica, es decir, debe presentar una dinámica compleja. Esta complejidad dinámica podrá estar generada bien por un sistema puramente aleatorio, bien por un sistema dinámico determinista en régimen de comportamiento caótico, bien por un proceso en el que se combinen estas dos fuentes de complejidad.

El siguiente paso consiste en utilizar otra serie de herramientas que sean capaces de detectar cierta correlación o dependencia temporal en la evolución de las series económicas, ya que precisamente si la serie ha sido generada por un sistema dinámico determinista, por definición, su evolución temporal deberá estar regida por dicho sistema. Así, una segunda herramienta para detectar comportamientos caóticos es precisamente el análisis de su correlograma en el dominio temporal. En tercer lugar, el análisis espectral en el dominio de las frecuencias, periodograma, debe mostrar evidencia a favor de dicha aperiodicidad.

El segundo grupo de herramientas complementarias a las anteriores tratan de encontrar evidencia a favor o en contra de que el sistema dinámico generador de la serie converge a atractores extraños, es decir, se centran en la estimación de la dimensión fractal y las propiedades de estabilidad local del atractor. Para ello, un aspecto previo que tendremos que considerar será el de la reconstrucción del atractor a partir de la serie temporal de forma que se conserven las mismas propiedades cualitativas del sistema dinámico desconocido. Dicha reconstrucción se puede realizar utilizando el método de los retardos, en el que la órbita del sistema original se reconstruye a través de vectores cuyos componentes serán los propios valores retardados de la serie temporal. La reconstrucción de la órbita por este método requiere de la elección adecuada tanto del retardo de reconstrucción y de la dimensión del vector de estados – dimensión de inmersión – de forma que la órbita así reconstruida replique a la verdadera dinámica del sistema subyacente.

### 1.2.2 Análisis Espectral en el dominio de Frecuencias: La transformada de Fourier, el espectro de potencias y el periodograma

Una de las propiedades de los sistemas caóticos de dinámica compleja es que la evolución temporal de sus soluciones presenta una alta irregularidad y aperiodicidad, esto es, trayectorias o movimientos oscilatorios no repetidos en el tiempo cuyo periodo puede considerarse infinito. Uno de los test utilizados para comprobar si una serie temporal procede de un proceso caótico determinista consiste en estimar su periodicidad mediante el análisis espectral en el dominio de frecuencias (Ver Brown 1995).

El análisis espectral analiza el dominio de frecuencias de la serie temporal tratando de revelar cuál es el conjunto de frecuencias presentes en la serie, esto es, detectando cuales son las frecuencias dominantes en la serie temporal. El término frecuencia es utilizado aquí como indicador de la velocidad con que se repite un fenómeno, es decir, la inversa del período del movimiento oscilatorio. Con el análisis espectral podrá, por tanto, construirse un *periodograma* de la serie, en el que se revelarán las periodicidades ocultas en la misma, y que en general no serán claramente visibles a partir de la inspección del gráfico de su evolución temporal.

### 1.2.3 Exponente de Hurst, movimientos brownianos y el análisis R/S

El exponente de Hurst es una medida de la *predicibilidad o memoria* presente en una serie temporal que permite discriminar entre procesos generadores puramente estocásticos del tipo ruido blanco, frente a otros procesos, deterministas o estocásticos, que generan ruidos coloreados distintos al blanco – ruido negro y rosa -.

Antes de exponer el método de estimación del exponente de Hurst y como éste puede ayudar a la detección de comportamientos caóticos, y debido precisamente a la relación entre dicho exponente y los movimientos brownianos vamos a reseñar cuales son las propiedades básicas de estos procesos.

El *movimiento browniano ordinario* tiene sus orígenes en el estudio del movimiento errático y desordenado de pequeñas partículas sólidas suspendidas en un líquido. Quedó sistematizado cuando, en 1923, Norbert Wiener formuló un modelo geométrico no diferenciable y aleatorio para describir y analizar con rigor el movimiento de una partícula sujeta a un gran número de shocks moleculares en espacios  $n$  – dimensionales. Este modelo fue aplicado posteriormente, con bastante éxito, a la descripción de toda una serie de fenómenos y movimientos erráticos que han pasado a denominarse *procesos de Wiener o movimientos brownianos ordinarios*.

El *movimiento browniano fraccionario*, introducido por Mandelbrot y Van Ness (1968) supone una generalización del movimiento browniano ordinario en la que se permite que la tendencia estocástica del desplazamiento total acumulado del proceso sea una función no lineal del tiempo. Más concretamente, un movimiento fraccional, puede definirse como un proceso aleatorio  $x(t)$  con incrementos idénticamente distribuidos  $N(0, \sigma)$ :

$$x(t) = x(t-1) + u(t); u(t) \approx ID \ N(0, \sigma)$$

Tal que:

$$E[x(t+n) - x(t)] = 0$$

$$Var[x(t+n) - x(t)] = 2\sigma^2 |n|^{2H}; \forall t, 0 \leq H \leq 1$$

Es decir, con un desplazamiento acumulado con media cero y varianza o tendencia estocástica función del tiempo transcurrido entre dos observaciones. Es fácil comprobar que cuando  $H = 0.5$  estaríamos ante un proceso browniano ordinario con un desplazamiento acumulado cuya tendencia estocástica sería una función lineal del tiempo. Cuando  $H \neq 0.5$ , estaríamos ante un movimiento browniano fraccional – que por tanto es más general que el anterior –, con un desplazamiento acumulado cuya tendencia estocástica sería ahora una función no lineal del tiempo transcurrido. La presencia de esta tendencia estocástica hace, que al igual que en el movimiento browniano ordinario, la variable  $x(t)$  posea una memoria infinita respecto a sus valores pasados.

A partir de esta expresión obtenemos que, como por definición  $-1 \leq \rho \leq 1$ , entonces el rango posible para valores de  $H$  será  $0 \leq H \leq 1$ . Podemos encontrarnos ante tres tipos de ruidos generadores de movimientos brownianos según su correlación temporal:

- Ruido Blanco:  $\rho = 0 \Rightarrow H = 0.5$  (Ruido sin correlación temporal o ruidos independientes en el tiempo)

- Ruido Negro:  $\rho > 0 \Rightarrow 0.5 < H < 1$  (Ruido con correlación temporal positiva o ruido con persistencia temporal)

- Ruido Rosa:  $\rho < 0 \Rightarrow 0 < H < 0.5$  (Ruido con correlación temporal negativa o ruido con antipersistencia temporal)

La existencia de ruidos distintos al blanco implica que los cambios o desplazamientos de un proceso estocástico que sigue un movimiento browniano fraccionario pueden presentar cierta *memoria* respecto al pasado. Los valores del factor de escala  $H$ , muestran cual es el carácter de dicha memoria o tendencia respecto al pasado:

- $0 < H < 0.5 \Rightarrow$  Comportamiento dinámico antipersistente o ergódico – ruido rosa –, en el cual se espera que la dirección de cambio corriente o actual no siga en el futuro (implica una mayor volatilidad que un paseo aleatorio). En el límite, si  $H = 0$ , la serie temporal debe cambiar su dirección en cada iteración.
- $H = 0.5 \Rightarrow$  Movimiento incorrelacionado en el tiempo - ruido blanco-.
- $0.5 < H < 1 \Rightarrow$  Comportamiento persistente o reforzador de tendencia – ruido negro –, en el cual se puede esperar, con certidumbre creciente a medida que el valor se aproxima a 1, que sea cual sea la dirección del cambio en la variable (tendencia puntual), ésta continuará en el futuro (implica menor volatilidad que un paseo aleatorio). Por ejemplo, una línea recta tendrá un exponente  $H = 1$ .

H. E Hurst derivó un método de su propia invención cuya principal relevancia se que permite estimar el factor de escala  $H$  asociado al ruido de un movimiento browniano fraccional a partir de una muestra temporal del mismo. Es por ello, que el factor de escala  $H$ , ha pasado a denominarse exponente de Hurst.



La estimación del exponente de Hurst se deriva del análisis R/S que pasamos a comentar. El análisis R/S trata de estimar cual es el rango estandarizado de variación para distintos intervalos de tiempo de una serie temporal y permite estimar el exponente de Hurst asociado a la serie temporal considerando que esta es el ruido asociado a un movimiento browniano fraccional.

La estimación del exponente de Hurst asociado a la serie temporal, nos indicará si ésta se comporta como un ruido blanco, rosa o negro según los valores que tome, es decir nos indicará la existencia o no de cierta memoria o correlación en las serie. Cabe, sin embargo, cuestionarse la significatividad de los valores estimados del exponente de Hurst a partir del análisis R/S. En particular, cabe preguntarse si la serie original es efectivamente un ruido blanco, cuestión ésta que resultará especialmente relevante para el análisis de comportamientos caóticos en la dinámica subyacente a la serie temporal.

En definitiva, estamos interesados en realizar el siguiente contraste de hipótesis a partir del análisis R/S efectuado sobre una serie temporal:

H0) El proceso es aleatorio e independiente normal (Ruido blanco gaussiano)

H1) El proceso no está incorrelacionado (Ruido gaussiano persistente o antipersistente)

### **1.3 La reconstrucción del atractor y medidas invariantes del caos**

En esta sección se plantean los conceptos teóricos que constituyen la base del análisis empírico realizado en el capítulo 3 de análisis de recurrencia visual. Entre ellos se destacan:

- La técnica de la Función de Información mutua para determinar el tiempo de retardo (delay)
- El método de Falsos Vecinos Cercanos para la dimensión de inmersión (embedding)

Los sistemas caóticos están caracterizados porque su evolución temporal en el espacio de fases queda atrapada en un atractor extraño – caos en sentido de Ruelle -. Por tanto, si la serie temporal observada procede de un sistema dinámico caótico, éste debe converger a un atractor con estructura fractal y además la evolución de la serie dentro de dicho atractor debe presentar una dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales.

#### **1.3.1 La reconstrucción del atractor a partir de una serie temporal: el método de los retardos**

Se describe el método de los retardos para reconstruir el atractor en el espacio de fases a partir de una serie temporal. Éste método se fundamenta en el *teorema de inmersión* de Takens (1981), que establece que, bajo ciertas condiciones, aunque no sea posible reconstruir la órbita del sistema dinámico en el espacio de fase original, sí será posible obtener una aproximación que resulte topológicamente equivalente, y que por tanto, permitirá extraer toda la información relevante acerca del sistema dinámico subyacente y desconocido que genera la serie temporal.

Un concepto fundamental relacionado con la reconstrucción del atractor es el de la *dimensión de inmersión*, que estará definida como la dimensión del espacio donde se reconstruye el atractor – seudo espacio de fases o espacio de inmersión -, y que como veremos, además de darnos información válida para la reconstrucción del atractor, también nos da una idea aproximada de cual es la verdadera dimensión del sistema dinámico – grados de libertad – que genera la serie temporal observada.

Para mostrar en qué consiste la técnica de reconstrucción del espacio de fases por el método de retardos supongamos que un proceso generado por un sistema dinámico n dimensional definido en tiempo continuo

$$\dot{x}_t = f(x_t)$$

o en tiempo discreto:

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

Supongamos que dicho proceso es observable (Ver Luenberger 1979), pero que el observador no conoce ni la forma estructural del sistema dinámico, ni su dimensión n, ni tampoco el valor exacto de ningún de las variables de estado. Lo único que se conoce es un *observable*, es decir, un escalar que el observador puede medir, y que denotaremos por y. Dicho observable podrá ser una función de alguna de las n variables de estado del sistema o, de manera genérica, una función h del conjunto de variables de estado del sistema también desconocida para el observador:

$$y_t = h(x_t)$$

De esta forma, la observación en el tiempo de la variable  $y_t$  proporciona una muestra o serie temporal de tamaño N con la cual se trata de extraer información sobre las propiedades cualitativas del comportamiento del sistema dinámico original en su evolución dentro del espacio de fases n – dimensional. Es decir, lo que se pretende con la técnica de la reconstrucción del atractor es reconstruir o extraer información sobre la dinámica oculta de f a partir de la serie temporal de la variable observada  $y_t$ . De hecho, como tanto el campo vectorial f como la función h son desconocidas, no se puede reconstruir el espacio de fases original. Sin embargo sí se puede formar un pseudoespacio de fases capaz de representar la dinámica original.

La reconstrucción del espacio de fases se basa en la creación o proyección del escalar observado en otras variables  $y_t$  - inmersiones o *embeddings* – m – dimensionales construidas a partir de la serie temporal retardada:

$$y_t = \left( y_t, y_{t+\tau}, y_{t+2\tau}, y_{t+3\tau}, \dots, y_{t+(m-1)\tau} \right)$$

Siendo  $\tau$  el *retardo de reconstrucción* – un período fijo de muestreo entre dos observaciones consecutivas – y m la *dimensión de inmersión*. De esta forma es posible obtener una trayectoria m – dimensional de inmersiones de tamaño N – m (siendo N el tamaño muestral de

la serie temporal) construidas a partir de los valores de la serie temporal retardados en el tiempo:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= (y_1, y_{1+\tau}, y_{1+2\tau}, y_{1+3\tau}, \dots, y_{1+(m-1)\tau}) \\
 y_2 &= (y_2, y_{2+\tau}, y_{2+2\tau}, y_{2+3\tau}, \dots, y_{2+(m-1)\tau}) \\
 y_3 &= (y_3, y_{3+\tau}, y_{3+2\tau}, y_{3+3\tau}, \dots, y_{3+(m-1)\tau}) \\
 &\dots \\
 y_N &= (y_N, y_{N+\tau}, y_{N+2\tau}, y_{N+3\tau}, \dots, y_{N+(m-1)\tau})
 \end{aligned}$$

Si se eligen adecuadamente  $\tau$  y  $m$ , la órbita descrita antes puede ser utilizada para aproximar la órbita descrita por el vector de estados del sistema original. La idea intuitiva que sustenta este método para reconstruir el atractor a partir de la serie temporal es que como la serie  $y_t$  procede de la observación de las variables del sistema, su evolución en el tiempo está regida, de alguna forma, por las leyes de movimiento especificadas en el propio sistema, y por tanto, la información contenida en la serie debería retener las propiedades del sistema  $n$  – dimensional original.

El teorema de inmersión de Takens garantiza que las características dinámicas y topológicas de un atractor – dimensión fractal y exponentes de Lyapunov – se mantienen en ese espacio reconstruido a partir de la serie temporal por el método de los retardos. Esto nos permitirá diferenciar entre un movimiento puramente estocástico frente a la alternativa de caos, ya que las trayectorias caóticas tienen una estructura en el espacio de fases que se puede estudiar a partir del seudo espacio de fases reconstruido.

La simple inspección del seudo espacio de fases, reconstruido a partir de la serie temporal observada proporciona una vía alternativa para detectar la dinámica económica caótica, comparando los patrones geométricos resultantes con los producidos por otros sistemas conocidos. Así, los ciclos límite de dinámica simple presentarán órbitas cerradas; el ruido blanco, produce en el espacio de fases una nube de puntos uniformemente distribuida; mientras que para sistemas caóticos tendremos situaciones intermedias, no serán ni órbitas cerradas ni nubes de puntos uniformemente distribuidas. En cualquier caso, será la estimación de las medidas invariantes para el atractor reconstruido – dimensión fractal y el espectro de Lyapunov – las que indicarán si estamos efectivamente ante series generadas por modelos de dinámica caótica.

### 1.3.2 La determinación del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor

Como decíamos, tanto el retardo  $\tau$  como la dimensión de inmersión  $m$ , deberán elegirse de manera adecuada para que la reconstrucción del atractor por el método de los retardos revele la verdadera información sobre la dinámica subyacente en una serie temporal. El teorema de Takens proporciona un límite inferior a la dimensión  $m$  que debe utilizarse en la reconstrucción del atractor  $m > 2n$ , aunque no dice nada sobre el retardo  $\tau$ .

Comenzamos apuntando que el retardo  $\tau$  deberá ser siempre un múltiplo del intervalo de muestreo  $\Delta t$ , ya que sólo se disponen de datos para la serie temporal para esos intervalos de tiempo (en adelante supondremos que  $\tau$  está definido sobre la secuencia de valores de la serie muestreados a intervalos  $\Delta t$ , esto es,  $\tau = \Delta t, 2\tau = 2\Delta t, 3\tau = 3\Delta t, \dots$ ). Por otra parte, podemos añadir que el retardo  $\tau$  no podrá ser ni muy pequeño ni muy grande, de forma que se permita un desacoplamiento significativo entre los valores consecutivos de la serie sin llegar a su independencia completa (Manrubia y Solé 1996).

Si  $\tau$  es demasiado bajo, no habrá pasado suficiente tiempo entre las dos observaciones como para que la evolución de la serie proporcione nueva información sobre el estado de fases original, esto es, los valores  $y_t$  y  $y_{t-\tau}$  serán esencialmente idénticos a efectos prácticos, linealmente dependientes o no suficientemente independientes como para que puedan distinguir el uno del otro en cuanto a la información que son capaces de revelar sobre la dinámica del sistema subyacente. El atractor resultante cuando  $\tau$  es muy pequeño representará una figura muy concentrada en la diagonal central del espacio de inmersión  $n$  – dimensional, no pudiéndose recoger información sobre el verdadero espacio de estados del sistema original.

Por otra parte, el retardo  $\tau$  tampoco deberá ser muy grande, ya que entonces  $y_t$  y  $y_{t-\tau}$  estarán muy alejados en el tiempo y si el sistema dinámico es caótico y presenta dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales, no podrá detectarse la correlación o dependencia dinámica entre ambos valores. Es decir, no se podrá asegurar que ambos valores estén conectados en el tiempo por el sistema dinámico. En este caso, si el sistema es caótico, la figura geométrica dibujada para la reconstrucción del atractor tendrá a confundirse con la correspondiente a un proceso puramente estocástico incorrelacionado en el tiempo – la dependencia respecto a las condiciones iniciales hará que los posibles errores de medida tiendan a crecer en el tiempo hasta que las observaciones  $y_t$  y  $y_{t-\tau}$  estén totalmente incorrelacionadas en sentido estadístico -.

Dos son, fundamentalmente, los métodos que se han propuesto para la elección del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor. Ninguno de ellos con una demostración formal que justifique su uso. El primero propone utilizar aquél retardo para el que la función de autocorrelación alcanza su primer cero. Este método se fundamenta en que precisamente para ese retardo los valores de la serie estarán linealmente incorrelacionados, pudiéndose sin embargo, captar la estructura no lineal del proceso dinámico subyacente si dicho retardo no es excesivamente elevado. Este método aunque proporciona retardos adecuados en algunos casos, en otros, como en el atractor de Lorenz supone la elección de un retardo demasiado elevado para la reconstrucción del atractor.

El segundo método para la elección del retardo óptimo es la reconstrucción del atractor, de mayor aceptación y más sofisticado que el anterior, fue propuesto por Fraser y Swinney (1996) y utiliza un criterio más general de independencia basado en la *función de información mutua media*. Esta función supone una generalización de la función de correlación lineal y es capaz de captar cualquier tipo de correlación o dependencia lineal o no lineal entre dos observaciones separadas por un retardo  $\tau$ . La *fimm* mide la información que se puede obtener sobre  $y_{t-\tau}$  a partir del conocimiento de  $y_t$ . Así, este método propone utilizar como retardo para la reconstrucción aquél para el cual se alcance el primer mínimo de la función de

información mutua, ya que entonces, el retardo será suficientemente alto como para que los dos valores no estén proporcionando la misma información, pero sin perder del todo la dependencia proporcionada por el sistema dinámico subyacente, ya que a partir de dicho retardo, el primer mínimo -, la información mutua comienza a aumentar.

El método de la información mutua se basa en la teoría de la información y el concepto de entropía. Con la teoría de la información se trata de medir el grado de incertidumbre que se tiene sobre un sistema a partir del conocimiento que se genera con la información muestral del mismo. Imaginemos ahora que queremos construir o definir una medida de la información que sobre el conocimiento del sistema proporciona el acaecimiento de un suceso dado. Así dado un sistema  $X$  que puede encontrarse en un momento cualquiera, en un estado cualquiera de  $n$  posibles  $(x_i : i = 1, \dots, n)$  cada uno de los cuales posee una probabilidad a priori  $p_i$ .

Retomemos ahora el problema de la elección del retardo óptimo  $\tau$ . Para la reconstrucción del atractor. Como dijimos, este retardo debe ser lo suficientemente grande como para que las observaciones muestrales proporcionen distinta información sobre la dinámica subyacente en el sistema, pero tampoco demasiado alto para evitar que ambos valores estén totalmente incorrelacionados y no pueda extraerse información sobre la dinámica de la serie en el paso de  $t$  a  $t + \tau$ .

La información que sobre un posible valor de  $y$  de la serie temporal proporciona el conocimiento del valor concreto que haya tomado la serie  $\tau$  instantes antes en el tiempo se denomina *información mutua*, y proporciona una medida de la cantidad de información aprendida. Si tenemos en cuenta que por definición, para dos variables aleatorias cualesquiera  $x$  e  $y$  la probabilidad conjunta y si calculamos la media sobre todos los posibles pares, podemos definir la *función de información mutua media* entre dos valores de una serie temporal separados por un retardo  $\tau$  como:

$$I(\tau) = \sum_{t=1}^{N-\tau} p(y_t, y_{t+\tau}) \log \left( \frac{p(y_t, y_{t+\tau})}{p(y_t)p(y_{t+\tau})} \right)$$

Se puede considerar que se trata de una función de autocorrelación general, capaz de captar correlaciones o dependencias en el tiempo de todo tipo, lineales y no lineales, y por tanto supone un instrumento más general que la función de autocorrelación simple.

Fraser y Swinney (1986) proponen utilizar como retardo para la reconstrucción aquél para el cual se alcance el primer mínimo de la función de información mutua, ya que entonces, el retardo será suficientemente alto como para que los dos valores no estén proporcionando la misma información, pero sin perder del todo la dependencia proporcionada por el sistema dinámico subyacente, ya que a partir de dicho retardo – el primer mínimo – la información mutua comienza a aumentar.

### 1.3.3 La determinación de la inmersión: el porcentaje de falsos vecinos

Tras la elección del retardo óptimo, el siguiente paso en la reconstrucción del atractor a partir de la serie temporal observada consiste en la elección de la dimensión de inmersión apropiada.

El teorema de Takens garantiza que si somos capaces de observar un escalar  $y_t = h(x_t)$ , donde  $x$  es el vector de estados  $n$  dimensional de un sistema dinámico definido por un campo vectorial  $f(x)$ , entonces la estructura geométrica de la dinámica multivariante desconocida generada por la solución del sistema dinámico – la órbita descrita por la secuencia de puntos  $x$  en el espacio euclideo de dimensión  $n$  puede ser *recuperada* desde ese conjunto de medidas escalares construyendo nuevos vectores  $m$  dimensionales, cuyos componentes serán los retardos de la señal escalar.

Para que la reconstrucción de un atractor por el método de los retardos conserve las propiedades del sistema dinámico generador de la serie temporal, el teorema de Takens exige que, además de que la serie se obtenga una vez que el proceso dinámico subyacente se encuentre ya en el atractor, que tanto las funciones estructurales que definen el sistema dinámico como la función que transforma el espacio de estados en la serie temporal escalar sean suaves. Este último es el principal ingrediente del teorema de Takens, ya que aunque en él se exige adicionalmente que la dimensión euclidea de inmersión  $m$  sea superior al doble de la dimensión fractal del atractor original, esta condición es en realidad una condición suficiente pero no constituye una condición necesaria. Dicho de otra forma, alcanzar la dimensión de inmersión que establece el teorema de Takens garantiza que se preservan las propiedades de la dinámica original, posibilitándose así la detección de comportamientos caóticos a partir de una serie temporal observada.

Existen distintas aportaciones que tratan de detectar cual es la dimensión mínima necesaria para recoger la verdadera dinámica subyacente en una serie temporal, de forma que se optimice la información disponible - lo que resulta especialmente conveniente cuando estamos ante series cortas como en el caso de la economía -.

Un primer método entre los más utilizados es el de la *descomposición en componentes principales* o descomposición de Karhunen – Loeve. Un segundo método para la elección de la dimensión de inmersión adecuada para la reconstrucción del espacio de fases es el denominado de los *falsos vecinos o puntos falsamente próximos en el espacio de inmersión*.

## 2. DATOS Y ANÁLISIS CAÓTICO

En la primera sección de este capítulo se presentan los datos de índices bursátiles<sup>4</sup> utilizados y se hará un comentario en especial del caso de Uruguay. Luego en la segunda sección se aplican algunas de las técnicas descritas en el capítulo anterior para estudiar la dinámica caótica de las series.

### 2.1 Datos

Los datos seleccionados corresponden al valor de cierre diario de los índices bursátiles de las principales bolsas de valores a nivel mundial en el período enero 2008 – agosto 2012<sup>5</sup>, para los días que existen datos<sup>6</sup>. Por tanto, se excluyeron los días en que la Bolsa de cada país no operó. A los efectos de organizar el trabajo se van a separar los índices por zonas geográficas (Tabla 1).

**Tabla 1: Índices Bursátiles utilizados organizados por Zona Geográfica**

<b>Zona</b>	<b>Índice</b>
Asia	Nikkei 225
Europa	IBEX 35 (España) CAC 40 (Francia) DAX (Alemania) FTSE 100 (Reino Unido)
Latinoamérica	BOVESPA (Brasil) MERVAL (Argentina) BVMBG (Uruguay)
EEUU	Dow Jones Nasdaq 100 S&P 500

<sup>4</sup> Un índice bursátil corresponde a un estadístico compuesto, usualmente un número, que trata de reflejar las variaciones de valor o rentabilidades promedio de los instrumentos que lo componen

<sup>5</sup> La información se obtuvo de <http://www.invertia.com/> y de la página web de la Bolsa de Valores de Montevideo.

<sup>6</sup> La elección de este período se debe a que el indicador bursátil de la Bolsa de Valores de Montevideo se comenzó a publicar a fines de enero de 2008 y se eligió dicho período para todos los indicadores bursátiles.

A continuación se presentan algunas características de las series de los índices bursátiles.

### 2.1.1 No normalidad

El Cuadro N° 1 muestra información de la distribución de los retornos diarios de los índices bursátiles elegidos para el estudio para el período 01/02/2008 a 10/08/2012<sup>7</sup>.

**Cuadro N° 1: Estadísticos Descriptivos de los retornos diarios de los índices bursátiles**

	NIKKEI	IBEX_35	CAC	DAC	FTSE	BOVESPA	MERVAL	BVMBG	D_J	NASDAQ	S_P
<b>Datos</b>	1081	1154	1367	1153	1137	1153	1072	1119	1144	1139	1096
<b>Máximo</b>	12.9%	13.5%	10.6%	12.1%	9.4%	13.7%	11.9%	6.8%	10.5%	11.8%	11.0%
<b>Mínimo</b>	-12.0%	-9.6%	-9.5%	-7.3%	-9.3%	-12.1%	-15.3%	-6.7%	-8.2%	-11.1%	-13.3%
<b>Media</b>	0.0%	-0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%
<b>Mediana</b>	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%	0.1%	0.1%
<b>Desv. Estándar</b>	1.9%	1.9%	1.7%	1.8%	1.6%	2.1%	2.2%	0.7%	1.6%	1.8%	1.7%
<b>Skewness</b>	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1
<b>Kurtosis</b>	11	7	9	8	9	10	10	36	10	9	12
<b>Jarque-Bera</b>	2,985	913	1,959	1,351	1,480	2,125	2,309	49,496	2,273	1,751	3,620
<b>Valor P</b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Como podemos observar en el Cuadro anterior las series presentan una elevada Kurtosis. La prueba Jarque – Bera complementa este resultado claramente dado el Valor P de cada serie observamos que se rechaza la hipótesis nula de normalidad. Por lo tanto la probabilidad de que los retornos de los índices bursátiles provengan de una distribución normal es casi nula. Siguiendo a la Dra. Grau Carles, podemos concluir que la no normalidad y la elevada kurtosis son indicios de que la serie ha sido generada por un proceso no lineal. Esto lo que nos estaría indicando es que los índices bursátiles analizados no estarían bien descritos por una distribución normal.

### 2.1.2 No linealidad

Al igual que en Espinosa (2008), para verificar la no linealidad se va a emplear la prueba BDS que es no paramétrica con la hipótesis nula de que una serie temporal determinada es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d)<sup>8</sup>.

De acuerdo a Brock (1986) la prueba se aplica sobre los residuos de un modelo ajustado con el mejor retardo de un proceso autorregresivo. Lo anterior, para evitar rechazos de la hipótesis nula debido a la dependencia lineal. Así, se propone dicha prueba como un método indirecto de analizar la no linealidad. La prueba BDS sigue una distribución asintótica normal con media cero y varianza unitaria. Tiene la ventaja de ser eficiente para muestras superiores a 200

<sup>7</sup> En el Anexo I se presentan los gráficos de los histogramas y el test de Normalidad correspondiente.

<sup>8</sup> La prueba BDS fue desarrollada por Brock, Dechert y Scheinkmann en 1987 e implementada junto con LeBaron 1994).

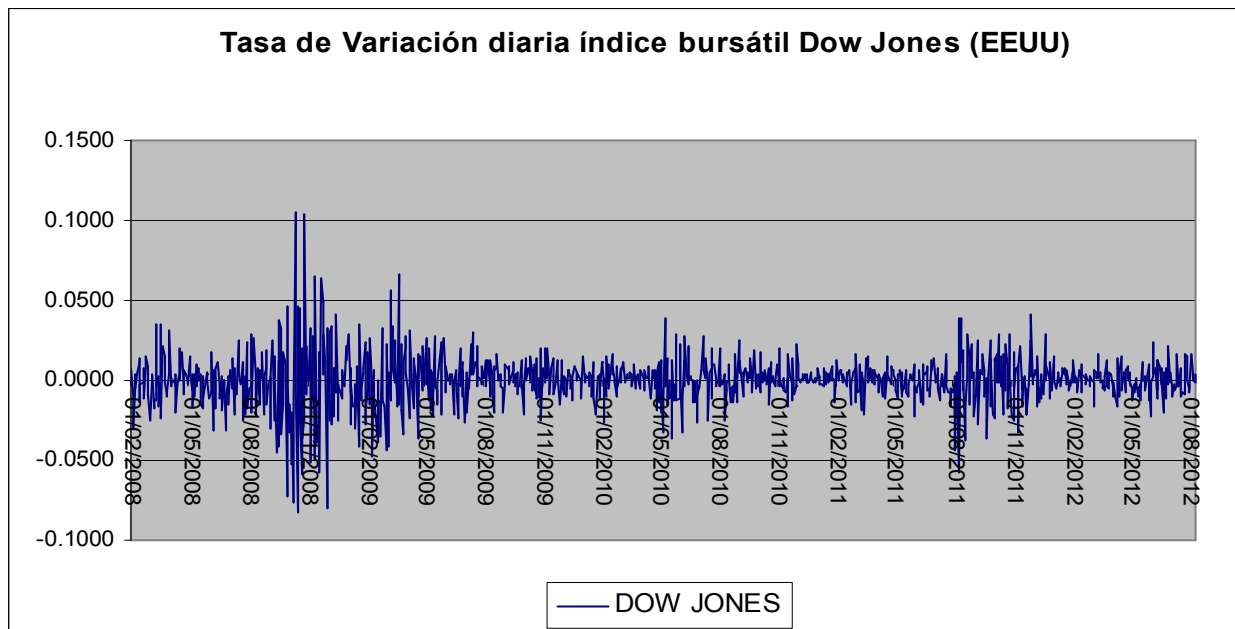


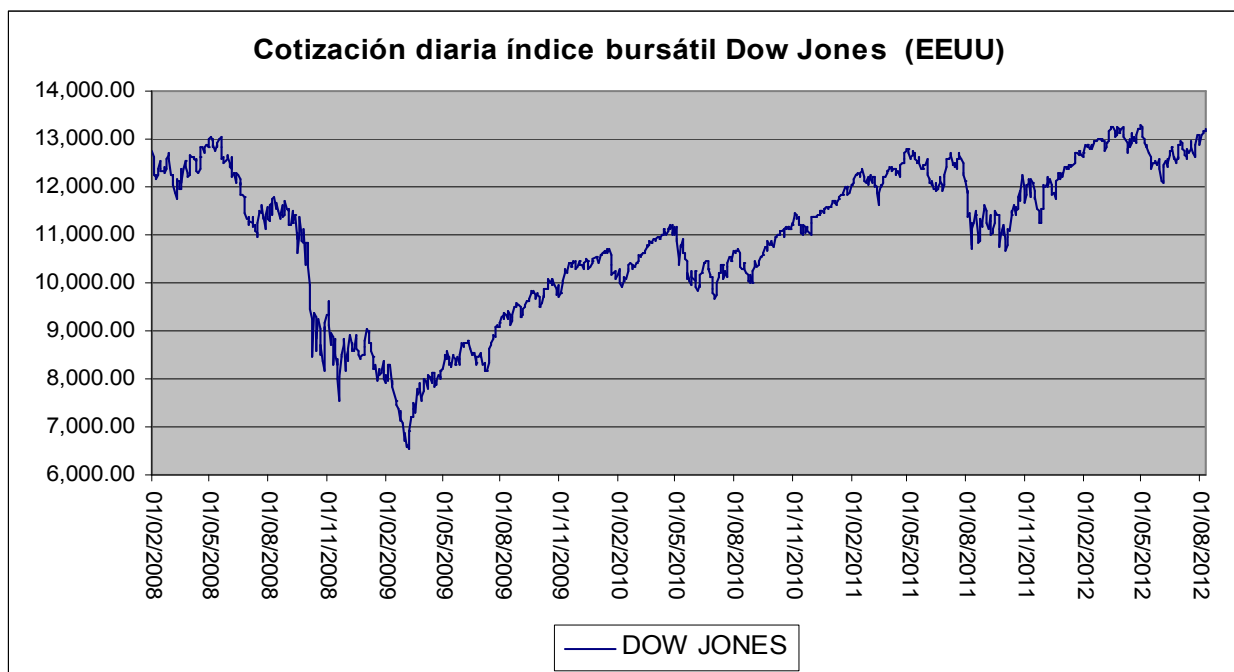
datos y tiene potencia para detectar dependencia no lineal determinista y dependencia no lineal estocástica.

Con el fin de maximizar los resultados de las pruebas se estimó para dimensiones de 2, 3, 4, 5, 6. Los resultados de la prueba de independencia BDS se presentan en el Anexo II. Se rechaza para todas las series la hipótesis de independencia en las series originales y los residuos de los modelos estimados y por tanto se concluye la no linealidad de las series.

### 2.1.3) Análisis Gráfico

En el Anexo 3 se presentan los gráficos de las series en niveles. A modo de ejemplo se presenta el gráfico para el Dow Jones (EEUU). En la próxima sección se hará un breve comentario del caso uruguayo.





#### 2.1.4) Descripción caso de Uruguay: índice bursátil BVMBG

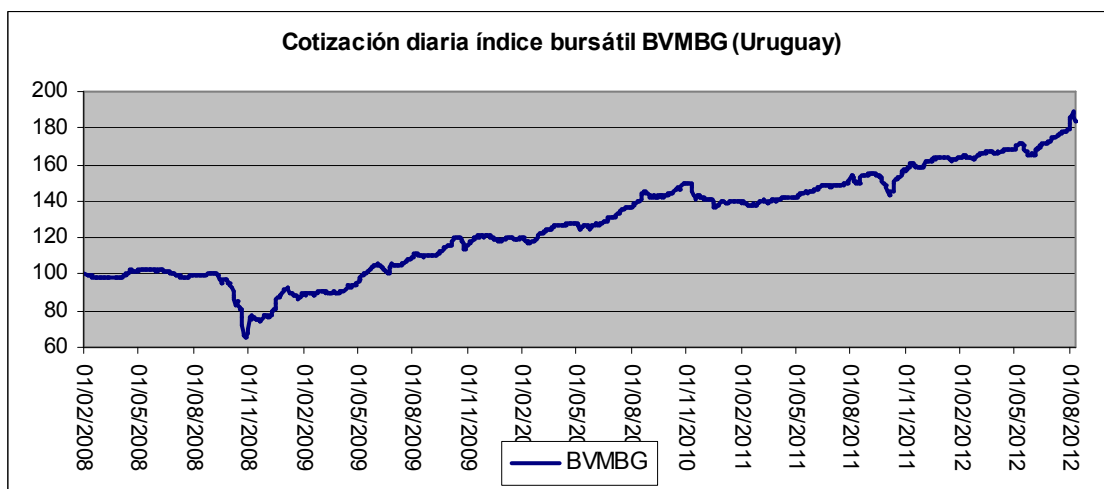
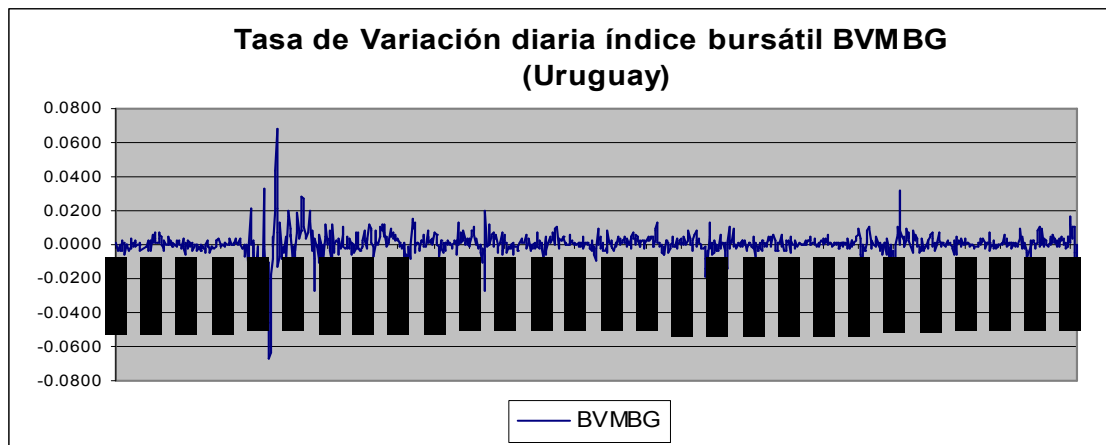
La Bolsa de Valores de Montevideo (BVM) elabora un indicador bursátil que permite evaluar el comportamiento del mercado de valores de Uruguay. Dicho indicador incluye instrumentos con un alto grado de liquidez y un volumen circulante importante para la dimensión del mercado uruguayo.

Se trata de implementar un índice bursátil de bonos globales (BVMBG) para un portafolio de activos compuesto por todos los bonos globales que presenten características comunes como ser:

- Emitidos por el Estado uruguayo internacionalmente
- Poseer un circulante mayor a los 90 millones de dólares y estar nominados en esa moneda

Por lo tanto el BVMBG mide la variación en la rentabilidad promedio del portafolio de activos de los bonos globales, con las características descritas anteriormente.

A continuación se muestra la evolución del índice gráficamente:



## 2.2) Más herramientas de matemática del caos

Luego de analizado la no normalidad y la no linealidad de las series de índices bursátiles, se procede a aplicar otras herramientas de la matemática del caos que permiten dar mayores indicios de un comportamiento caótico en la dinámica de las series bajo estudio previo al análisis de recurrencia visual en el próximo capítulo.

Dentro de las herramientas que se plantean en el capítulo anterior para detectar la presencia de caos vamos a trabajar en esta sección con los exponentes de Hurst y de Lyapunov.

Se va a aplicar el método desarrollado por Wolf (1985) para calcular el exponente de Lyapunov más grande de las series de índices bursátiles. Se trata de medir la constante de divergencia entre puntos arbitrariamente cercanos. El primer paso consiste en seleccionar dos puntos muy cercanos entre sí. La dificultad consiste en descartar aquellos puntos que se encuentran dentro del mismo periodo orbital. Una vez que se tienen los dos puntos de inicio pertenecientes a diferentes órbitas, se deja que la dinámica del sistema los transporte hacia su estado final.

Los resultados de algoritmo de Wolf para el cálculo de los exponentes de Lyapunov de las diferentes series se resumen en el cuadro siguiente<sup>9</sup>. También se presenta el cálculo del exponente de Hurst y los resultados de las pruebas de significatividad de dicho exponente.

	NIKKEI	IBEX	CAC	DAC	FTSE	BOVESPA	MERVAL	BVMBG	DJ	NASDAQ	S_P
<b>Exponente de Hurst</b>	0.31	0.43	0.38	0.28	0.17	0.35	0.27	0.39	0.33	0.39	0.26
<b>Valor P</b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
<b>Exponente Dominante de Lyapunov</b>	0.14	0.22	0.19	0.22	0.17	0.39	0.26	0.12	0.37	0.23	0.16

Como se observa todas las series de índices bursátiles presentan un valor H que cumple la condición  $0 < H < 0.5$  característica de un comportamiento dinámico antipersistente o ergódico – ruido rosa -, en el cual se espera que la dirección de cambio corriente o actual no siga en el futuro (implica una mayor volatilidad que un paseo aleatorio). En el límite, si  $H = 0$ , la serie temporal debe cambiar su dirección en cada iteración.

El valor P de la tabla refiere a la prueba de hipótesis

H0) El proceso es aleatorio e independiente normal (Ruido blanco gaussiano)

H1) El proceso no está incorrelacionado (Ruido gaussiano persistente o antipersistente)

Para realizar este contraste se construye la serie de valores R/S esperados bajo la hipótesis nula de ruido blanco gaussiano (Anis y Lloyd, 1976):

$$E(E/S_p) = \frac{p-1/2}{p} \left( \frac{p\pi}{2} \right)^{-1/2} \sum_{r=1}^{p-1} \left( \frac{p-r}{r} \right)^{1/2}$$

Así podemos contrastar la hipótesis nula de ruido blanco gaussiano utilizando el siguiente estadístico para el contraste de significación:

$$\frac{\hat{H} - E(\hat{H})}{1/\sqrt{N}} \approx N(0,1)$$

También se puede contrastar la hipótesis nula en base al vapor p como se muestra en el cuadro anterior.

Finalmente el exponente dominante estimado positivo de Lyapunov para las series de índices bursátiles indica que existe evidencia para afirmar que existe sensibilidad a las condiciones

<sup>9</sup> El cálculo del exponente de Hurst se realizó en base al programa Dataplore y el exponente de Lyapunov dominante se realizó en base a una aplicación del programa R y se compararon los resultados con una estimación no paramétrica mediante una programación en Eviews realizada por el autor que se pone a disposición.

iniciales (efecto mariposa) y por lo tanto se podría afirmar que existe una función  $f$  no lineal caótica que gobierna la dinámica de los índices bursátiles analizados.

En resumen hasta ahora las series de índices bursátiles diarias analizadas presentan las siguientes características:

- no normalidad
- no linealidad
- son generadas por un ruido rosa
- se verifica el efecto mariposa

Dada toda esta información resulta pertinente el análisis de las series mediante el Análisis de Recurrencia Visual en la próxima sección. Dicho análisis va a aportar dos elementos:

1º) Se van a desarrollar más herramientas de la matemática del caos para el estudio de la dinámica caótica

2) Se va a explotar las características no lineales y caóticas de las series mediante técnicas de estimación no lineales a las series intentando estudiar el poder predictivo de las mismas.

### 3. ANÁLISIS DE RECURRENCIA VISUAL

La contrastación de comportamiento caótico en series económicas y financieras se inició en los años ochenta para variables macroeconómicas como el PIB y agregados monetarios. En dichas series se encontró poca evidencia de caos, no obstante se demostró la existencia de una estructura no lineal (Le Barón, 1994).

Desde entonces, se han realizado diversos estudios en la búsqueda de comportamiento caótico en series financieras y económicas (Di Matteo, Aste y Dacorogna, 2005; Los, 2004; Los y Yu, 2005, entre otros). Así, lo habitual es encontrar investigaciones que utilizan técnicas y herramientas tales como el Coeficiente de Hurst, el Exponente de Lyapunov y la Dimensión de Correlación para la contrastación de comportamiento caótico en dichas series.

Una herramienta distinta a las anteriores corresponde a los gráficos de recurrencia. El gráfico de recurrencia es un conjunto de puntos en un cuadrado de dimensión  $M \times M$ , donde los ejes o los lados del cuadrado ( $M$ ), representan la secuencia cronológica de los vectores en el espacio reconstruido. Una ventaja importante de esta herramienta consiste en que es adecuada para todo tipo de series con la única condición de que los datos se encuentren igualmente espaciados.

A continuación se presentan la técnica de Análisis de Recurrencia Visual y se realiza la aplicación a las series utilizadas. Este análisis se basa en la definición de gráfico de recurrencia de Eckmann, Kamphorst y Ruelle (1987) y en el RQA de Zbilut y Webber (1992) para el análisis de los índices bursátiles elegidos. A continuación vamos a definir y describir las características básicas del gráfico de recurrencia.

#### 3.1 Gráficos de recurrencia.

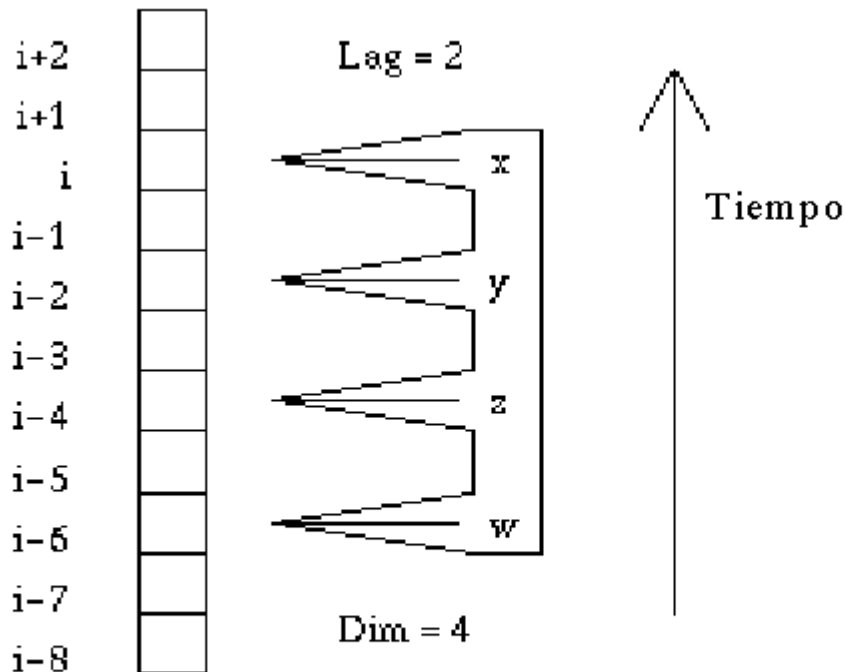
Si consideramos una serie de tiempo unidimensional,  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , generada de un sistema dinámico determinista de dimensión  $d$ , Takens (1981) demostró que es posible, a partir de esta serie correspondiente a una cualquiera de las variables del sistema, obtener información del sistema completo. Demostraron que se puede generar un espacio multidimensional denominado espacio de estados artificial, reconstruido o pseudoespacio de fases ("embedding space") de dimensión  $d_e \geq 2d + 1$ , de manera que las trayectorias en el espacio reconstruido tienen las mismas propiedades geométricas y dinámicas que las trayectorias en el espacio multidimensional del sistema dinámico completo.

Para la construcción del espacio de estados artificial se parte de la serie temporal y se agrupan los valores de la misma formando "vectores" cuyas coordenadas son los valores de la serie y sus consiguientes retardos. El número de coordenadas es igual a la dimensión del espacio artificial ( $d_e$ ) y el número de vectores que se pueden construir es

$$M = N - d_e$$

Un vector de retardos en una dimensión  $d_e$  vendría dado por  $(X_i, X_{i+T}, \dots, X_{i+(d_e-1)T})$ , donde el

retardo  $T$  puede ser cualquier valor. Si hacemos  $T = 2$  y  $d_e = 4$  los vectores de retardo se obtendrían agrupando los valores de la serie tal y como se muestra en la Figura 1.



**Figura 1.** Método de retardos para la construcción de vectores.

Después de elegir una dimensión de reconstrucción ( $d_e$ ) y obtener los correspondientes vectores, el gráfico de recurrencia es un conjunto de puntos en un cuadrado de dimensión  $M \times M$ , donde  $M$ , los ejes o los lados del cuadrado, representan la secuencia cronológica de los vectores en el espacio reconstruido. Para obtener el gráfico de recurrencia se coloca un punto en la intersección de las coordenadas  $(i, j)$  si el vector  $x(i)$  está próximo a  $x(j)$ . El criterio de proximidad es una distancia pequeña previamente seleccionada. Dado que  $i$  y  $j$  son realmente tiempos el gráfico de recurrencia da información del alcance temporal de la correlación entre los valores de la serie.

La inspección visual del gráfico de recurrencia mostrará  $M$  puntos en la bisectriz del cuadrado. Además, pueden aparecer segmentos de línea más cortos paralelos a la bisectriz y correspondientes a vectores, cronológicamente secuenciados, que cumplen con el criterio de proximidad establecido. Teóricamente, estos segmentos no deben aparecer si el mecanismo generador de la serie es aleatorio y aparecerán en caso de sistemas deterministas. Si la serie fuera periódica en el gráfico de recurrencia aparecerían segmentos de recurrencia paralelos a la bisectriz. En segundo lugar, y si consideramos que dos vectores están próximos cuando la distancia entre ellos es  $d(x(i), x(j)) \leq 1$ , dibujaríamos un punto en la intersección de los pares de vectores que cumplen con el criterio de proximidad.

El gráfico de recurrencia es un procedimiento cualitativo para diferenciar variabilidad caótica de estocástica o para detectar cambios de estado en la evolución de un sistema. En la práctica, la construcción de los gráficos de recurrencia requieren obtener información de la dimensión

de inmersión y el tiempo de retardo. El Análisis de Recurrencia Visual utiliza la técnica AMI (Mutual Information Function) para determinar el tiempo de retardo y el método FNN (False Nearest Neighbours) para la dimensión de inmersión.

### **3.2 Aplicación del Análisis de Recurrencia Visual (ARV)**

El objetivo de esta aplicación empírica es intentar describir y predecir el cambio en la dinámica de los índices bursátiles elegidos. Como se plantea en Espinosa 2008, “determinar el cambio en el precio de las acciones es un tema que apasiona a inversionistas institucionales, individuales y académicos. Sin embargo, hasta ahora, ninguno puede dar una respuesta certera acerca de porqué se producen dichos cambios”.

En el análisis realizado en el capítulo 2 se obtuvieron varios indicios que permiten afirmar con una veracidad bastante alta que las series de indicadores bursátiles utilizados presentan una dinámica caótica. Esta conclusión preliminar tiene implicaciones teóricas y prácticas muy importantes que se comentarán más adelante.

A continuación se va a aplicar una herramienta complementaria a las ya empleadas. Se analiza la existencia de un comportamiento caótico de los índices bursátiles empleando el análisis de recurrencia visual. En concreto se van a aplicar distintas técnicas y métodos como los que se detallan:

- Análisis Gráfico
- Análisis de recurrencia
- Entropía de espacio temporal

Se utilizará el análisis de recurrencia visual para detectar gráficamente patrones y cambios estructurales ocultos en datos. La idea fundamental es que una serie de tiempo observable es la realización de un proceso dinámico y la interacción, en un cierto plazo, de las variables relevantes del sistema. Las series de indicadores bursátiles utilizadas cumplen perfectamente estas características dado que su comportamiento es determinado por muchos factores tales como el ciclo económico, la estabilidad política, las expectativas de los inversionistas, entre otros.

#### **3.2.1 Función de Información Mutua (AMI)**

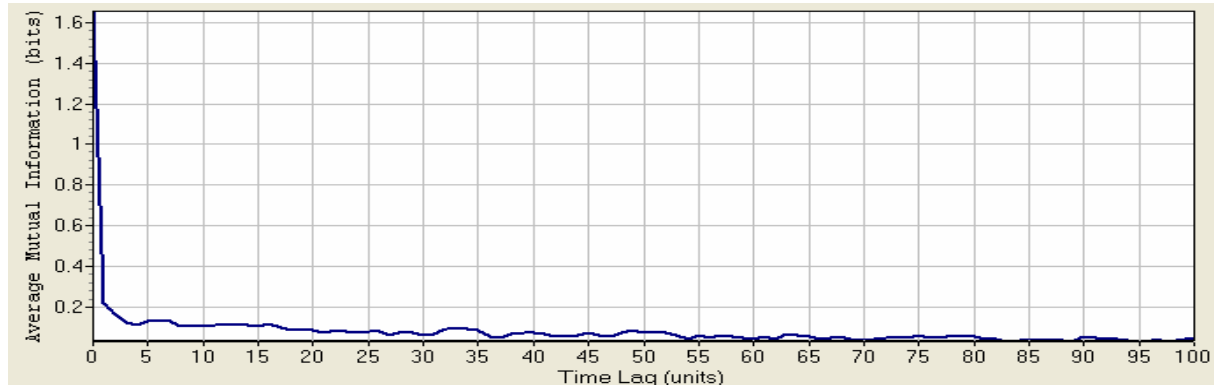
Como se comentó en el capítulo 1, la información mutua estima el valor óptimo del tiempo de retardo para la reconstrucción del espacio de fases (Fraser y Swinney, 1986). La idea central de esta técnica es que un buen tiempo de retardo  $T$  es aquel que dado un estado del sistema en momento  $t$  provea una información nueva acerca del estado en  $t + T$ . Se sugiere que cuando el tiempo de retardo  $I(T)$  alcance su primer mínimo, éste se utilice para la reconstrucción del espacio de fase.

A continuación se muestra el resultado de calcular la información mutua de la serie de índice bursátil BVMBG (Uruguay) a modo de ejemplo (en el Anexo N° 4 se muestra el resto de resultados). En este caso se observa que el mínimo se encuentra en  $T = 4$  para la serie del



índice bursátil BVMBG. Para el resto de las series el retardo óptimo se da para  $T = 1$  y en el caso del Merval corresponde un retardo óptimo de  $T = 2$ .

### Gráfico de la Función Información Mutua para retornos diarios de BVMBG (Uruguay)

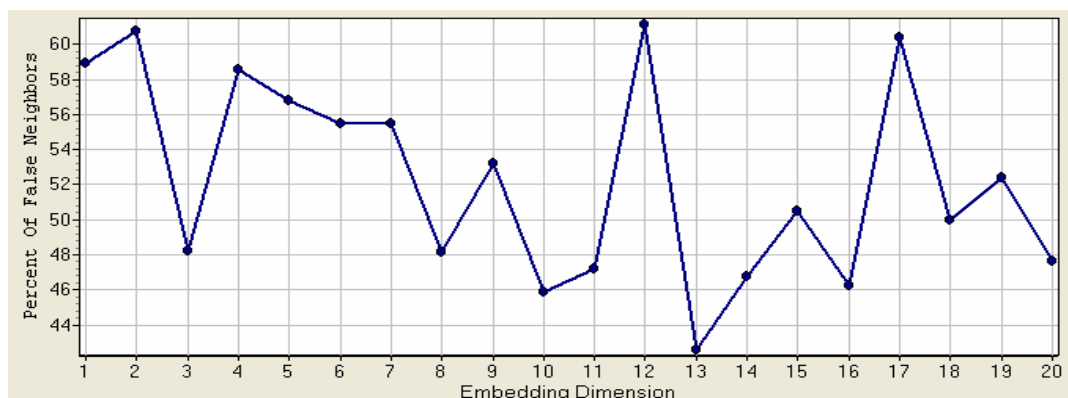


### 3.2.2 Falsos Vecinos Cercanos (FNN)

Como se plantea en Kennel, Brown y Abarbanel (1992), la base teórica de este método es que, para los sistemas determinísticos, los puntos cercanos en el espacio de fases reconstruido permanecen de esta forma bajo iteraciones posteriores en espacios de mayor dimensión. En términos simples, este método encuentra el vecino más cercano de cada punto en una dimensión dada y luego comprueba si estos puntos siguen siendo vecinos cercanos en una dimensión más alta. Se sugiere por los autores que cuando el porcentaje de vecinos cercanos alcance su primer mínimo se utilice la dimensión de inmersión correspondiente para la reconstrucción del espacio de fase.

A continuación se muestra el resultado de calcular Falsos Vecinos Cercanos a la serie de índice bursátil BVMBG (Uruguay) a modo de ejemplo<sup>10</sup> (en el Anexo N° 5 se muestra el resto de resultados). En este caso se observa que el mínimo local se encuentra alrededor de  $m = 13$  para la serie de tasa de variación diaria del BVMBG.

### Resultado de cálculo de Falsos Vecinos Cercanos para tasa variación diaria BVMBG



<sup>10</sup> Se agradece la ayuda de Eugene Kononov para el cálculo informático de las diferentes técnicas del Análisis de Recurrencia Visual.

A modo de resumen se presenta el siguiente cuadro con los resultados encontrados para el tiempo de retardo óptimo (información mutua) y la dimensión de inmersión (falsos vecinos cercanos) para reconstruir el espacio de fase de las tasas de variación diarias de los indicadores bursátiles:

	NIKKEI	IBEX_35	CAC_40	DAC	FTSE_100	BOVESPA	MERVAL	BVMBG	DJ	NASDAQ	S_P
AMI	1	1	1	1	1	1	2	4	1	1	1
FNN	13	19	1	3	12	4	17	13	12	19	8

### 3.2.2 Determinación de dinámica caótica usando el ARV

#### a) Análisis Gráfico

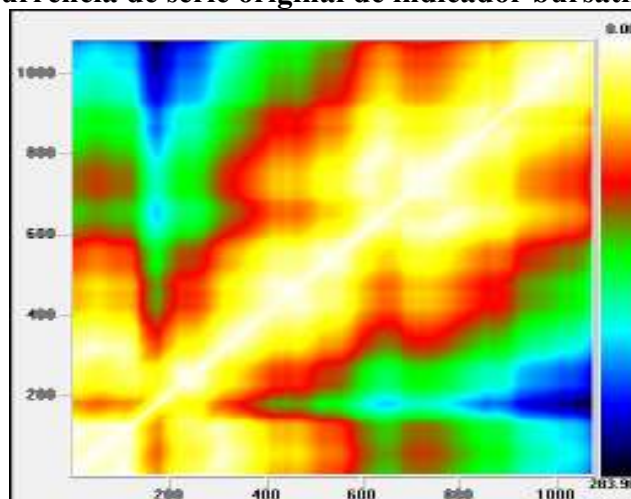
Siguiendo a Peter (1994) se estudia si las series de los indicadores bursátiles tienen gráficamente la misma estructura, en cualquier escala temporal a estudiar. El hecho de que estas series tengan la misma apariencia en distintas escalas es concordante con la hipótesis del mercado fractal. Sin embargo esta característica observada en las series no es garantía definitiva de estar ante un proceso caótico.

#### b) Gráfico de Recurrencia

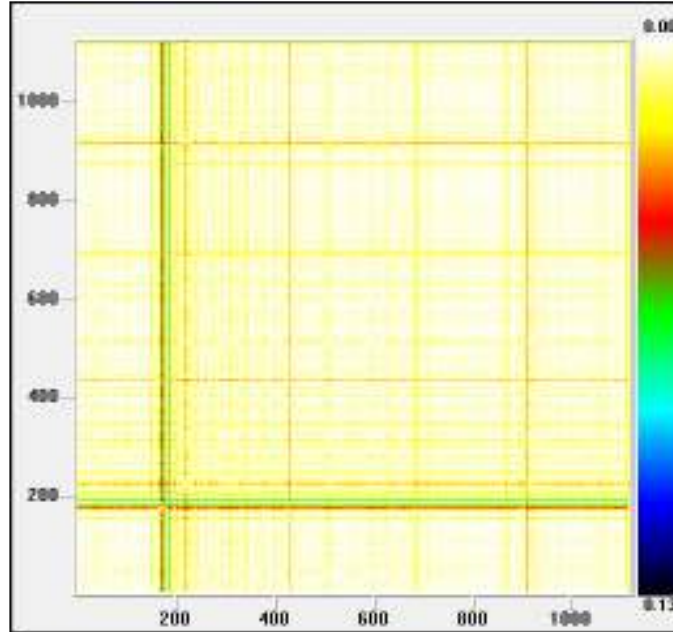
Como plantean Eckmann, Kamphorst y Ruelle (1987), una señal de determinismo será cuando más estructurado sea el gráfico de recurrencia y una señal de aleatoriedad cuando más uniforme y no exista un patrón inidentificable.

En el Anexo 6 se muestran los gráficos de recurrencia para los series de indicadores bursátiles diarios. Se observa que los gráficos de recurrencia son bastantes parecidos a una serie aleatoria en donde no hay un patrón definido. A su vez, se observa cómo la dinámica del sistema se contrae en algunos puntos para luego expandirse, esto es una característica de los sistemas con dinámica caótica (Espinosa 2008). A modo de ejemplo ilustra el gráfico de recurrencia de la serie original del índice BVMBG y de su tasa de variación diaria.

#### Gráfico de Recurrencia de serie original de indicador bursátil diario BVMBG



### Gráfico de Recurrencia de tasa de variación diaria índice BVMBG



Los resultados encontrados con la utilización de los gráficos de recurrencia no son concluyentes y deben complementarse con otro tipo de técnicas.

#### c) Entropía de Espacio Temporal

La Entropía de Espacio Temporal (STE) compara la distribución de colores sobre el gráfico completo de recurrencia con la distribución de colores sobre cada línea diagonal del gráfico de recurrencia. Cuanto mayores sean las diferencias entre la distribución global y las distribuciones sobre las líneas diagonales individuales, más estructurada es la imagen.

Matemáticamente, compara las distancias entre todos los pares de vectores en el espacio reconstruido, con las distancias entre las diversas órbitas que se desarrollan durante el tiempo. El resultado se normaliza y se representa como porcentaje. Porcentajes cercanos a 100 indicarán aleatoriedad en la serie mientras que porcentajes cercanos a 0 representarán series periódicas. Por último porcentajes entre 0 y 100 indicarán series con comportamiento caótico.

Para calcular la STE es necesario haber obtenido la dimensión de inmersión y el tiempo de retardo. Con los datos de la dimensión de inmersión y el tiempo de retardo que se obtuvo para las tasas de variación diaria de los indicadores bursátiles se calcula la STE en el cuadro siguiente

	NIKKEI	IBEX	CAC	DAC	FTSE	BOVESPA	MERVAL	BVMBG	DJ	NASDAQ	S_P
STE %	81	77	79	80	82	76	84	79	69	73	81

Los resultados de la Entropía de Espacio Temporal de las series de tasas de variación diaria de los indicadores bursátiles son otro indicio adicional que nos informan de comportamientos caóticos.

### 3.3 ANÁLISIS DE PREDICCIÓN NO LINEAL MEDIANTE EL ANÁLISIS DE RECURRENCIA VISUAL

Dada toda la evidencia obtenida de comportamiento caótico en las series es claro que no se puede captar la dinámica completa de los índices bursátiles mediante técnicas de series de tiempo lineales. Por lo tanto en la sección final de este trabajo se analiza una técnica de predicción no lineal en base al Análisis de Recurrencia Visual.

El objetivo final es estudiar si podemos captar la dinámica diaria de los indicadores bursátiles de las principales bolsas de valores mundiales mediante una técnica de predicción no lineal. La predicción de las series temporales, se puede pensar como la prueba definitiva del análisis de los sistemas dinámicos.

El modelado no paramétrico es útil en situaciones en las que no se puede (o no se quiere) hacer ninguna suposición sobre la forma funcional del proceso que generó la serie de tiempo observable. En lugar de asumir un modelo específico y el cálculo de sus coeficientes, podemos derivar el modelo a partir de datos proporcionados directamente. Es decir, que los datos "hablen" por sí mismos.

En ARV, esto se hace usando los modelos locales. En lugar de instalación de una solo modelo complejo con muchos coeficientes al conjunto de datos, nos encontramos con un modelo que cambia sus parámetros de forma adaptativa en función de la geometría del entorno local del sistema dinámico. Uno puede pensar en este modelo como un modelo de regresión cuyos parámetros cambian a medida que el modelo se mueve en el tiempo.

Para construir el modelo actual para generar predicciones, es necesario elegir determinados parámetros (el modelo no paramétrico es sólo en un sentido funcional de su forma global), como la incorporación de la dimensión, tiempo de retraso, etc. A continuación se explican algunos de estos parámetros

#### a) Dimensión:

Incrustación dimensión determina el número de los componentes en el vector reconstruido del estado del sistema. Si la serie de tiempo son libre de ruido, no hay penalización en el uso de mayores valores de dimensión incrustación, excepto para el tiempo de cálculo incrementado. Sin embargo, si las series de tiempo son ruidosos, el ruido se amplifica y la calidad de las predicciones se deteriorará, por lo que desee establecer la dimensión de inclusión lo más pequeño posible. Sin embargo, si la dimensión de la incrustación se fija demasiado bajo, las dinámicas subyacentes del sistema no se resolverán de forma exclusiva.

#### b) Retraso:

Retardo de tiempo determina el tiempo de separación de los componentes en el vector reconstruido del estado del sistema. Si el tiempo se ajusta a la baja, los correspondientes componentes del vector pueden ser demasiado redundantes. Si el tiempo se ajusta a alto, los componentes del vector correspondientes pueden ser demasiado independientes. Uno de los

métodos para determinar el valor óptimo del retardo de tiempo es la función de medio de información mutua.

### **c) Sugerencias para lograr una mejor predicción con esta técnica**

- i. La función de Información mutua y el método de vecinos falsos cercanos pueden ser utilizados para la primera aproximación de retardo de tiempo y dimensión de inmersión, respectivamente. Se debe tener en cuenta, sin embargo, que el "óptimo" puede no producir el mejor modelo predictivo.
- ii. El modelo predictivo es muy sensible a la "anchura de banda" parámetro que determina el tamaño de la vecindad local. Si se ajusta a su valor máximo, entonces todos los puntos (vecinos cercanos y lejanos de un punto de referencia) se consideran y se convierte efectivamente en el modelo "global". Las predicciones generadas serán más estables (tienen baja varianza), pero su precisión puede ser baja (sesgo grande). Si, por otro lado, el ancho de banda es muy pequeño, las predicciones generadas rápidamente pueden diferir de los valores reales después de un período inicial de mayor precisión.
- iii. Si hay una tendencia obvia en la serie, es posible que desee considerar la "distancia por coseno" como una medida de distancia para determinar los vecinos cercanos, en lugar de una distancia euclídea más tradicional. Distancia por coseno considera el ángulo entre los vectores y no tiene en cuenta su longitud, por lo que puede ser una mejor medida de la "similitud" si tus series no son estacionarias.

### **d) RESULTADOS OBTENIDOS**

A continuación se va a ilustrar el procedimiento seguido para obtener los resultados de las predicciones de los indicadores bursátiles diarios elegidos y sus tasas de variación diaria.

Para aplicar la metodología se requieren definir previamente los siguientes elementos:

- i. Intervalos de muestras para entrenamiento y predicción
- ii. Opciones del modelo
  - Predictor
  - Kernel
- iii. Concepto de distancia
- iv. Reconstrucción del espacio de estado

- retardo
- dimensión
- v. Cantidad de vecinos

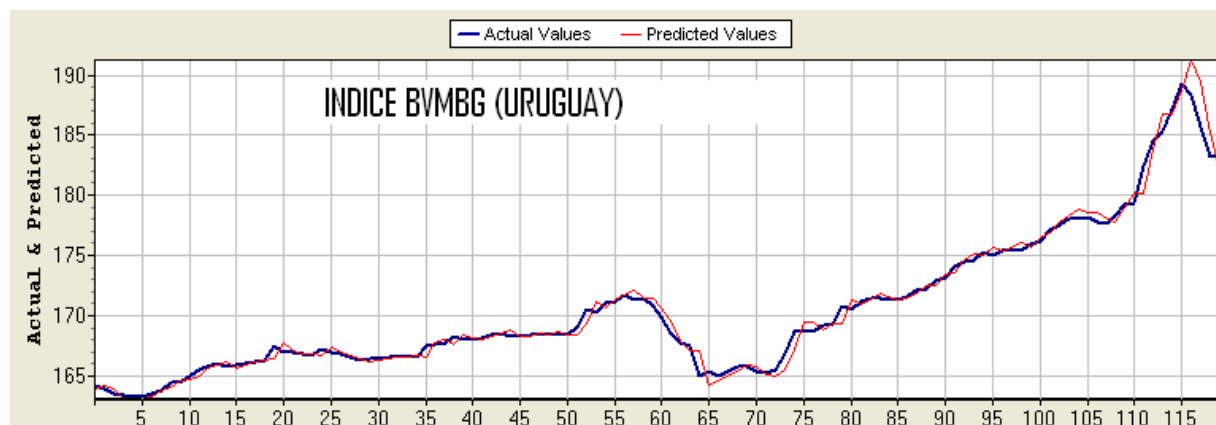
Se ilustra como ejemplo el indicador bursátil de la Bolsa de Valores de Montevideo.

#### d.1) Evaluación de la capacidad predictiva a largo plazo: 6 meses

De manera de evaluar el desempeño de largo plazo dentro del período muestral se van a separar las 1120 observaciones en un intervalo de entrenamiento que incluye las observaciones 1 – 1000 (período 01/02/2008 a 13/02/2012) y un intervalo de predicción que incluye las observaciones 1001 a 1120 (período 14/02/2012 a 10/08/2012). La idea es ver si la técnica logra captar la dinámica de las cotizaciones diarias del indicador bursátil en base a la muestra de entrenamiento definida a largo plazo considerando largo plazo un período aproximado de 6 meses.

Se evalúan diferentes opciones del modelo (predictor y kernel) y variantes del concepto de distancia. En el caso del BVMBG se definen el predictor **Loc. Weight Linear** y kernel **Exponential**; respecto al concepto de distancia trabajamos con la **Euclidean**. La reconstrucción del espacio de estados se realiza con los parámetros encontrados en el análisis del capítulo 3 (dimensión de inmersión y número de retardos).

A continuación se muestran los resultados de la predicción en base a los parámetros explicados anteriormente:



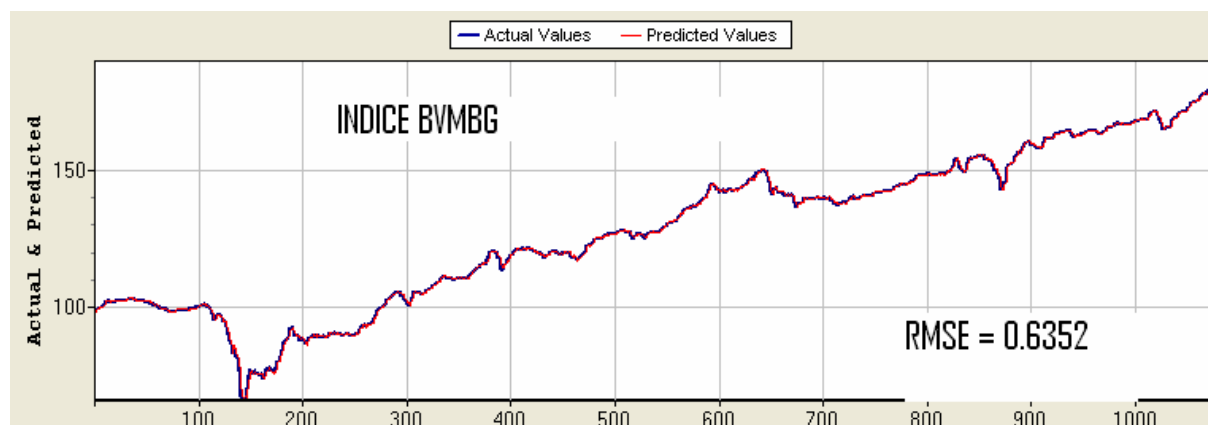
Recordar que estamos haciendo una predicción 6 meses delante de las cotizaciones diarias del índice bursátil de la Bolsa de Valores de Montevideo. Como medida de evaluación del error se plantea el RMSE que arroja un resultado de 0.7942 en el caso de la predicción 6 meses adelante.

## d.2) Evaluación de la capacidad predictiva a mediano plazo: 1 mes

A continuación se definió un período de entrenamiento mayor que abarca el período 31/1/2008 hasta el 10 de julio de 2012 y un período de predicción del 11 de julio de 2012 al 10/08/2012. La idea es comparar las predicciones en un horizonte de corto plazo de aproximadamente un mes.

Para realizar la predicción se manejan los mis parámetros que antes con el cambio de que la muestra de predicción se superpone a la de entrenamiento o sea la muestra de predicción va de 31/01/2008 a 10/08/2012 de manera de evaluar el desempeño dentro y fuera de la muestra de entrenamiento planteada.

Los resultados se presentan a continuación:

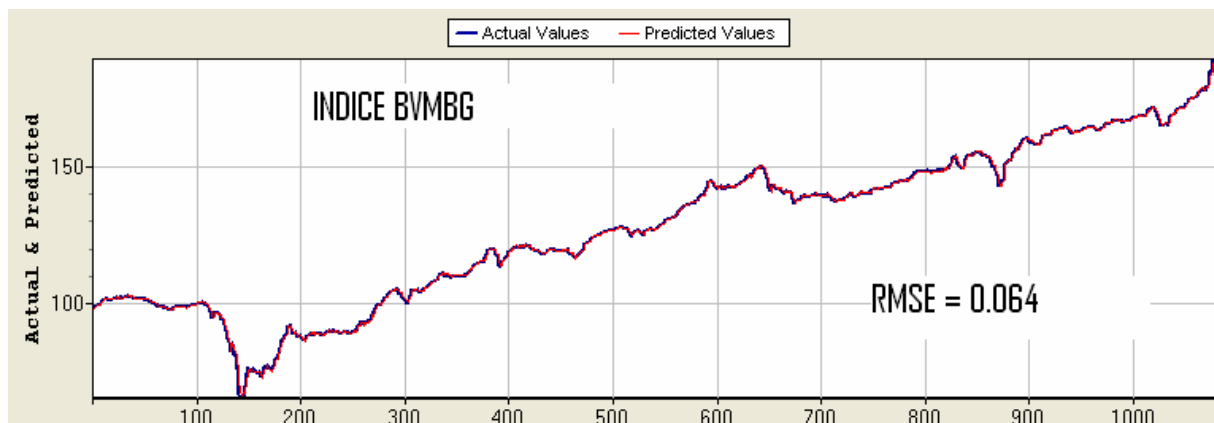


Si bien la escala del gráfico no permite evaluar, de manera clara, la mejora de la predicción al considerar un período de un mes adelante en relación al análisis de largo plazo planteado antes, vemos que el RMSE es bastante más bajo.

## d.3) Evaluación de la capacidad predictiva a muy corto plazo: 1 día

Finalmente vamos a analizar el desempeño diario del indicador bursátil de la Bolsa de Valores de Montevideo en un período de muy corto plazo o sea un día adelante. Creemos que este análisis es el que más relevancia tiene en la evaluación de la dinámica de las bolsas de valores. Se intenta responder a la pregunta de ¿Qué pasará mañana con el índice bursátil con información hasta hoy? En concreto nos preguntamos ¿se es capaz por medio de este análisis parados el 09/08/2012 (penúltimo día de la muestra considerada) prever con cierto grado de seguridad lo que va a pasar el día siguiente?

Para ello extendemos la muestra de entrenamiento hasta el día 09/08/20012 y vemos como se comporta el intervalo de predicción hasta el día siguiente. Como vemos a continuación la predicción, medido a través del RMSE mejora notoriamente.



Si ampliamos la escala del gráfico podemos tener una visualización del valor del último día. El valor real observado del indicador bursátil es de 183.27 mientras que la predicción un paso adelante nos estaría dando 183.45. Este análisis de un paso en adelante se realizó para varios espacios de tiempos diferentes y los resultados son increíblemente precisos.

Como conclusión final se resalta que la capacidad predictiva de la técnica es alta, con errores de predicción muy inferiores a comparada con técnicas lineales análisis de series de tiempo e incluso comparada con otras técnicas de análisis no lineal. En particular se compararon los errores de predicción con modelos univariados SARIMA y con los Modelos de Cambio de Régimen de Markov con probabilidades de transición variable y se obtuvieron resultados favorables a la técnica que se plantea en este trabajo. Resultados similares a los planteados para el caso de Uruguay se encontraron en la predicción de largo, corto y muy corto plazo de los indicadores bursátiles analizados.



## 4. REFLEXIONES FINALES

El objetivo de la ciencia económica es desvelar la naturaleza irregular y complicada del fenómeno económico. Dicho comportamiento se caracteriza por ser complejo, irregular y no lineal. Los modelos empíricos de análisis de series temporales han sido tradicionalmente lineales. La simplicidad de las herramientas para el análisis empírico ha sido el principal argumento a favor de la linealidad. Pero teóricamente es difícilmente justificable que el fenómeno económico siga un comportamiento lineal. El estudio de la no linealidad es complejo pero se hace necesario en la economía, por lo tanto es indispensable que se introduzcan conceptos e instrumentos nuevos relacionados con la no linealidad.

La mayoría de las series económicas y financieras, en particular, presentan un comportamiento aleatorio siendo en general muy difícil predecir su dinámica. El surgimiento de la teoría caótica y su estudio en campos como la física, la biología y la química ha permitido obtener resultados que sugieren que ésta se puede aplicar también en temas económicos.

Este artículo constituye un primer paso en el estudio del comportamiento caótico de los principales mercados de valores a nivel internacional y, en especial, de Uruguay mediante indicadores bursátiles de frecuencia diaria.

En concreto se analiza la dinámica caótica de los principales mercados de valores a nivel internacional, incluido Uruguay, mediante la aplicación del Análisis de Recurrencia Visual.

En el capítulo 1 se presenta un resumen de la matemática del caos, es decir, el conjunto de herramientas que tienen como objeto de estudio los sistemas caóticos. Dichas herramientas constituyen una alternativa al análisis estadístico o probabilístico de los fenómenos que se comportan de manera compleja o no regular. En particular vimos mediante que procedimientos y análisis es posible estudiar la presencia de un comportamiento caótico a partir de una serie temporal.

En el capítulo 2 se presentan los datos de los indicadores bursátiles de frecuencia diaria utilizados en el análisis y se aplicaron las principales herramientas planteadas en el capítulo 1 para el diagnóstico de comportamiento caótico en las series. Las conclusiones más importantes obtenidas en esta parte de la investigación es que todas las series presentan las siguientes características:

- no normalidad
- no linealidad
- son generadas por un ruido rosa
- se verifica el efecto mariposa

Una vez obtenidos varios indicios que parecen confirmar la hipótesis de comportamiento caótico en las series de indicadores bursátiles bajo estudio, se procedió a realizar un análisis complementario en el capítulo 3. Dicho análisis es el centro de la investigación y consiste en la aplicación del Análisis de Recurrencia Visual (ARV).

Dicho análisis se basa en los conceptos de gráfico de recurrencia de Eckmann, Kamphorst y Ruelle (1987) y en el RQA de Zbilut y Webber (1992) y se utiliza para detectar gráficamente

patrones y cambios estructurales ocultos en datos. La idea fundamental es que una serie de tiempo observable es la realización de un proceso dinámico y la interacción, en un cierto plazo, de las variables relevantes del sistema. Las series de indicadores bursátiles utilizadas cumplen perfectamente estas características dado que su comportamiento es determinado por muchos factores tales como el ciclo económico, la estabilidad política, las expectativas de los inversionistas, entre otros.

El objetivo principal de la aplicación del ARV es ver si es posible mediante esta técnica describir la dinámica no lineal de los indicadores bursátiles buscando conocer porqué se producen los cambios diarios en los indicadores. Si fuera posible conocer dicha dinámica sería posible realizar predicciones hacia el futuro.

Se realizó un estudio tomando un periodo de entrenamiento y un período de predicción partiendo la muestra para evaluar la capacidad predictiva de la técnica ARV. El estudio se realizó para 3 horizontes temporales:

- un horizonte de aproximadamente 6 meses (largo plazo)
- un horizonte de un mes (mediano plazo)
- un horizonte de un día (muy corto plazo)

Se presenta el análisis para el caso del BVMBG de Uruguay. Los resultados obtenidos fueron mucho mejores de los esperados para todos los horizontes de tiempo planteados.

En resumen las principales conclusiones que surgen del estudio son:

1. Todos los análisis realizados coinciden en el diagnóstico de un comportamiento caótico en las series de indicadores bursátiles diarios.
2. La conclusión anterior tiene grandes consecuencias en el análisis económico empírico y teórico.

Desde el punto de vista empírico, la presencia de caos en las series temporales obligaría al abandono de la aproximación lineal como simplificación de la realidad, por su excesivo reduccionismo paralizante.

Desde un punto de vista teórico, a la hora de la construcción de modelos para explicar el funcionamiento de los fenómenos observados en la realidad, se requiere la construcción de modelos teóricos no lineales que, aunque estructuralmente simples, sean capaces de generar comportamientos caóticos.

3. El Análisis de Recurrencia Visual aplicado para predecir la dinámica de largo, corto y muy corto plazo de los indicadores bursátiles de frecuencia diaria de los principales mercados bursátiles tienen un altísimo poder predictivo.
4. Evidenciar este comportamiento caótico en series financieras justifica que inversionistas públicos y privados así como los analistas busquen técnicas y modelos, basados en este nuevo paradigma, que les permitan obtener una mayor eficiencia en la administración de sus portafolios. Este nuevo paradigma que está surgiendo de a poco en el análisis económico y financiero tiene una relevancia enorme en un contexto de

crisis financiera global que existe sobre todo en Europa actualmente y cuyas consecuencias están lejos de terminar a la fecha de este trabajo.

Como tarea para el futuro queda el diseño de modelos que permitan entender porque surge un comportamiento caótico en los mercados financieros y cuales son los determinantes dentro del sistema y no fuera del mismo que permitan predecir un resultado al menos en el corto plazo.

## BIBLIOGRAFÍA

Anis, A. A y Loyd, E (1976) “The Expected Value of the Adjusted Rescaled Husk Range of Independent Normal Summands”. *Biometrika* 1.

Brock, W (1986) “Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version”. *Journal of Economic Theory*, 40.

Brock, W., W. Dechert y J. Scheinkman (1987). “A Test for Independence Based on the Correlation Dimension”, Working Paper, University of Wisconsin at Madison, Department of Economics.

Brown, C (1995). “Chaos and Catastrophe Theories”. Sage University Papers series on Quantitative Applications in the Social Sciences.

Devaney, R.L (1994). “An introduction to Chaotic Dynamical Systems”. Addison Wesley.

Di Matteo, Aste y Dacorogna (2005). “Term memories of developed and emerging markets: using the scaling analysis to characterize their stage of development”, *Journal of Banking & Finance*, vol. 29, pp. 827-851.

Eckmann, J.P., S.O. Kamphorst y D. Ruelle (1987). “Recurrence Plots of Dynamical Systems”, *Europhysics Letters*, 4 (9), pp. 973-977.

Espinosa, C. (2008) Comportamiento caótico en los mercados bursátiles latinoamericanos. *Revista Análisis económico* Vol XXII N° 51

Fraser. M. A y Swinney, H (1986) “Independent coordinates for strange attractors from mutual information”. *Physical Review A* 33.

Grau, Carles (1996) “Economía Dinámica caótica: una aplicación al mercado de capitales español”. Tesis Doctoral Universidad Complutense de Madrid.

Kennel, M.; Brown, R. (1992) “Determining minimum embedding dimension for phase – space reconstruction using a geometrical construction” *Physical Review A* 45.

Le Barón, B. (1994). “Chaos and nonlinear forecastability in Economics and Finance”, *Philosophical Transactions of Royal Society of London, Series A*, 348, pp. 397-404.

Liu, T., Granger, C y Heller, W (1993) “Using the correlation exponent to decide whether an economic time series is chaotic”. *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*.

Los, C. (2004). “Visualization of chaos for finance majors”, Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance num. 0409035.

Los C. y B. Yu (2005). “Persistence Characteristics of the Chinese stock markets”, Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance num. 0508008.

Luenberger, D. G (1979). “Introduction to Dynamic Systems. Theory Models and Applications.” John Wiley, Nueva York.

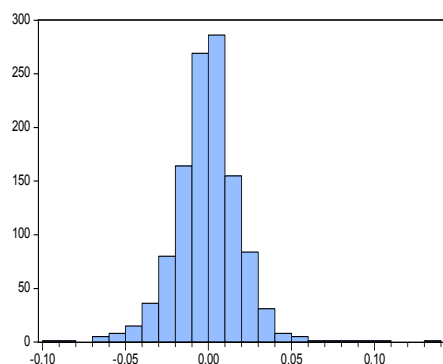
Mandelbrot, B.B y Van Ness, J. W (1968) “fraccional Brownian motions, fraccional noises and applications”. SIAM Review vol 10.

Takens, F (1981) “Detecting strange attractors in turbulence” Lectures notes in Mathematics N° 898. Springer – Verlag.

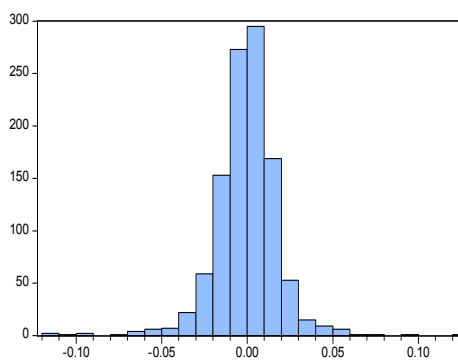
Wolf, A. “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”. Physica D, 16.

Zbilut, J.P. y C.L. Webber Jr. (1992). “Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots”, Physics Letters A, 171, pp. 199-203.

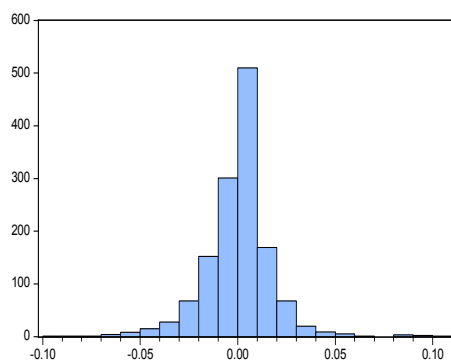
## Anexo I: Análisis Normalidad



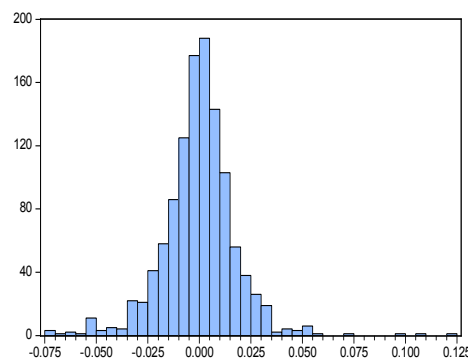
Series:	IBEX_35
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1154
Mean:	-0.000546
Median:	-3.23e-05
Maximum:	0.134836
Minimum:	-0.095859
Std. Dev.:	0.019473
Skewness:	0.267491
Kurtosis:	7.323996
Jarque-Bera:	912.7730
Probability:	0.000000



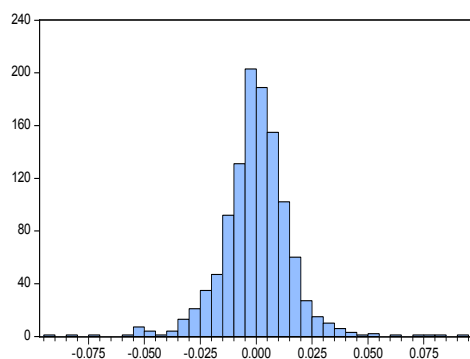
Series:	NIKKEI
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1081
Mean:	-0.000393
Median:	0.000289
Maximum:	0.129119
Minimum:	-0.119533
Std. Dev.:	0.018599
Skewness:	-0.561476
Kurtosis:	11.06230
Jarque-Bera:	2984.536
Probability:	0.000000



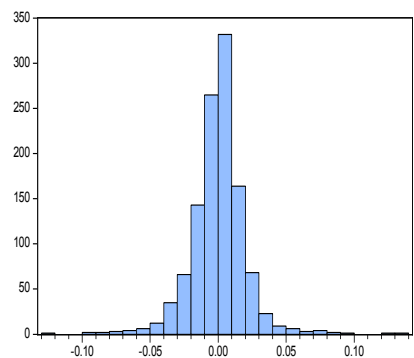
Series:	CAC_40
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1367
Mean:	-0.000255
Median:	0.000000
Maximum:	0.105946
Minimum:	-0.094715
Std. Dev.:	0.017065
Skewness:	0.158486
Kurtosis:	8.855695
Jarque-Bera:	1958.777
Probability:	0.000000



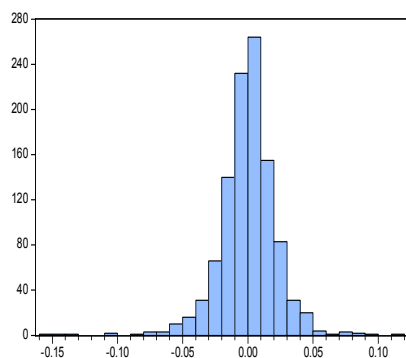
Series:	DAC
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1153
Mean:	1.17e-05
Median:	0.000461
Maximum:	0.120907
Minimum:	-0.073355
Std. Dev.:	0.017698
Skewness:	0.262705
Kurtosis:	8.277634
Jarque-Bera:	1351.387
Probability:	0.000000



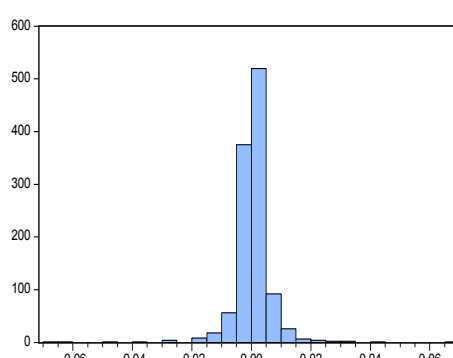
Series:	FTSE_100
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1137
Mean:	-4.90e-06
Median:	0.000136
Maximum:	0.093843
Minimum:	-0.092646
Std. Dev.:	0.015588
Skewness:	-0.100316
Kurtosis:	8.585619
Jarque-Bera:	1479.967
Probability:	0.000000



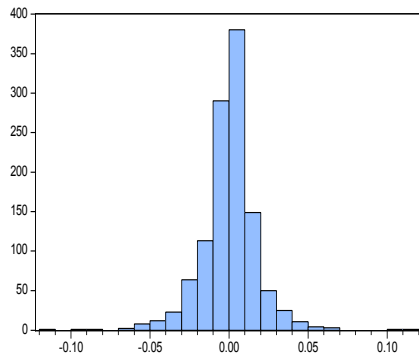
Series:	BOVESPA
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1153
Mean:	-3.06e-06
Median:	0.000125
Maximum:	0.136782
Minimum:	-0.120961
Std. Dev.:	0.020524
Skewness:	0.120437
Kurtosis:	9.646659
Jarque-Bera:	2125.176
Probability:	0.000000



Series:	Merval
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1072
Mean:	0.000176
Median:	0.000980
Maximum:	0.118612
Minimum:	-0.153489
Std. Dev.:	0.022212
Skewness:	-0.755074
Kurtosis:	10.02963
Jarque-Bera:	2309.099
Probability:	0.000000

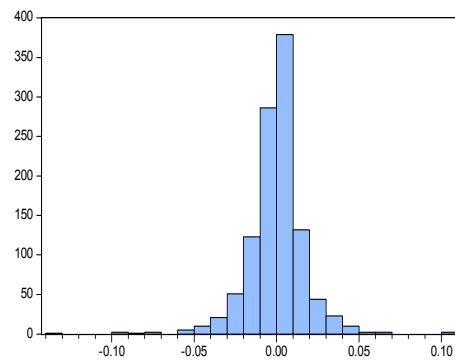


Series:	BVMBG
Sample:	1/02/2008 10/08/2012
Observations:	1119
Mean:	0.000541
Median:	0.000523
Maximum:	0.067809
Minimum:	-0.067201
Std. Dev.:	0.006662
Skewness:	-0.986908
Kurtosis:	35.52205
Jarque-Bera:	49496.15
Probability:	0.000000



Series: NASDAQ  
 Sample 1/02/2008 10/08/2012  
 Observations 1139

Mean	0.000343
Median	0.001157
Maximum	0.118493
Minimum	-0.111149
Std. Dev.	0.017584
Skewness	-0.117780
Kurtosis	9.070429
Jarque-Bera	1751.478
Probability	0.000000



Series: S\_P  
 Sample 1/02/2008 10/08/2012  
 Observations 1096

Mean	1.79e-05
Median	0.000735
Maximum	0.109572
Minimum	-0.132587
Std. Dev.	0.017182
Skewness	-0.582245
Kurtosis	11.82702
Jarque-Bera	3620.104
Probability	0.000000

## ANEXO N° 2: PRUEBA BDS

### BDS Test for NIKKEI

Date: 08/20/12 Time: 13:06

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.008589	0.002087	4.114701	0.0000
3	0.012881	0.002202	5.849896	0.0000
4	0.012497	0.001743	7.171073	0.0000
5	0.010413	0.001208	8.620830	0.0000
6	0.007899	0.000775	10.19232	0.0000

### BDS Test for IBEX\_35

Date: 08/20/12 Time: 13:13

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.006765	0.001834	3.687982	0.0002
3	0.009427	0.001799	5.239123	0.0000
4	0.008674	0.001324	6.549794	0.0000
5	0.007109	0.000854	8.326855	0.0000
6	0.005219	0.000509	10.24417	0.0000

### BDS Test for CAC\_40

Date: 08/20/12 Time: 13:14

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.007723	0.002515	3.070605	0.0021
3	0.013718	0.002733	5.020106	0.0000
4	0.013496	0.002229	6.054862	0.0000
5	0.011565	0.001593	7.259217	0.0000
6	0.009028	0.001054	8.561681	0.0000

### BDS Test for DAC

Date: 08/20/12 Time: 13:14

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.006095	0.002193	2.778522	0.0055
3	0.012668	0.002263	5.596570	0.0000
4	0.013779	0.001753	7.860304	0.0000
5	0.011605	0.001189	9.758936	0.0000
6	0.008925	0.000747	11.94899	0.0000

### BDS Test for FTSE\_100

Date: 08/20/12 Time: 13:15

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.010503	0.002147	4.891490	0.0000
3	0.016289	0.002235	7.288741	0.0000
4	0.015755	0.001745	9.026551	0.0000
5	0.012992	0.001194	10.88071	0.0000
6	0.009636	0.000756	12.74189	0.0000



**BDS Test for BOVESPA**

Date: 08/20/12 Time: 13:15

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

---

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.014100	0.002377	5.932061	0.0000
3	0.018420	0.002575	7.152124	0.0000
4	0.018067	0.002094	8.627167	0.0000
5	0.015182	0.001492	10.17803	0.0000
6	0.011842	0.000984	12.03950	0.0000

**BDS Test for Merval**

Date: 08/20/12 Time: 13:16

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

---

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.011181	0.002217	5.043504	0.0000
3	0.018930	0.002322	8.151313	0.0000
4	0.018618	0.001826	10.19898	0.0000
5	0.015147	0.001257	12.05140	0.0000
6	0.011078	0.000801	13.82818	0.0000

**BDS Test for BVMBG**

Date: 08/20/12 Time: 13:16

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

---

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.052368	0.003478	15.05465	0.0000
3	0.083059	0.004792	17.33138	0.0000
4	0.095416	0.004953	19.26353	0.0000
5	0.095518	0.004484	21.30379	0.0000
6	0.089570	0.003757	23.84147	0.0000

**BDS Test for DOWN\_JONES**

Date: 08/20/12 Time: 13:17

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

---

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.017815	0.002805	6.351936	0.0000
3	0.030793	0.003135	9.820980	0.0000
4	0.034707	0.002631	13.18979	0.0000
5	0.032318	0.001935	16.70340	0.0000
6	0.027054	0.001317	20.53683	0.0000

**BDS Test for NASDAQ**

Date: 08/20/12 Time: 13:17

Sample: 1/02/2008 10/08/2012

Included observations: 1742

---

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.012528	0.002655	4.718650	0.0000
3	0.021275	0.002876	7.397539	0.0000
4	0.023331	0.002339	9.976083	0.0000
5	0.021967	0.001666	13.18339	0.0000
6	0.018056	0.001099	16.42561	0.0000

**BDS Test for S\_P**

**Date: 08/20/12 Time: 13:18**

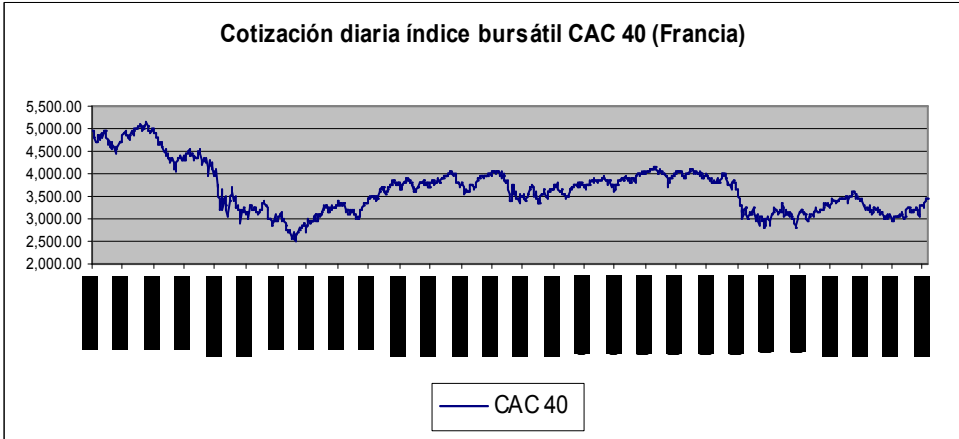
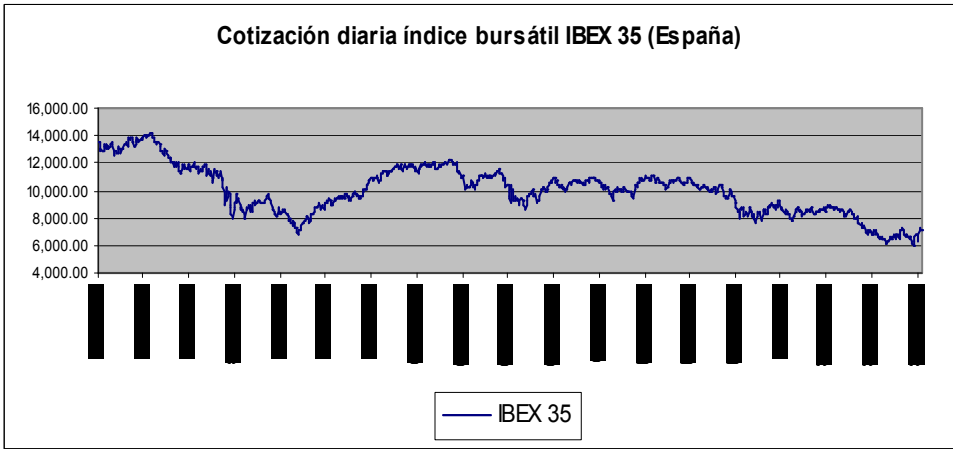
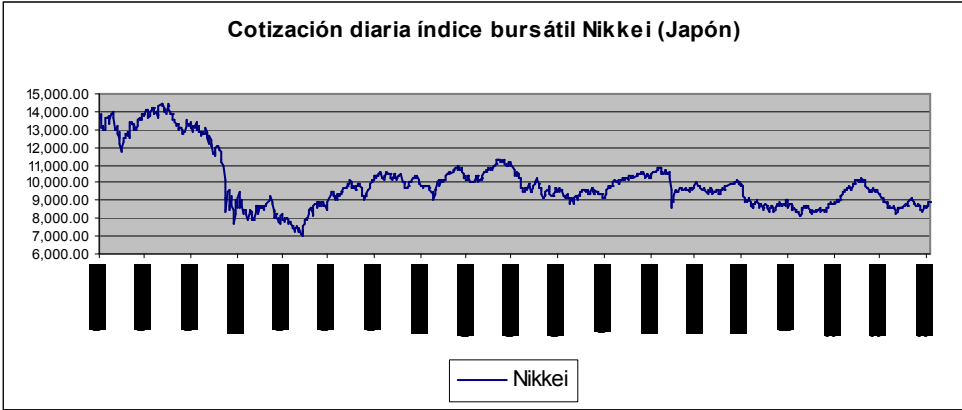
**Sample: 1/02/2008 10/08/2012**

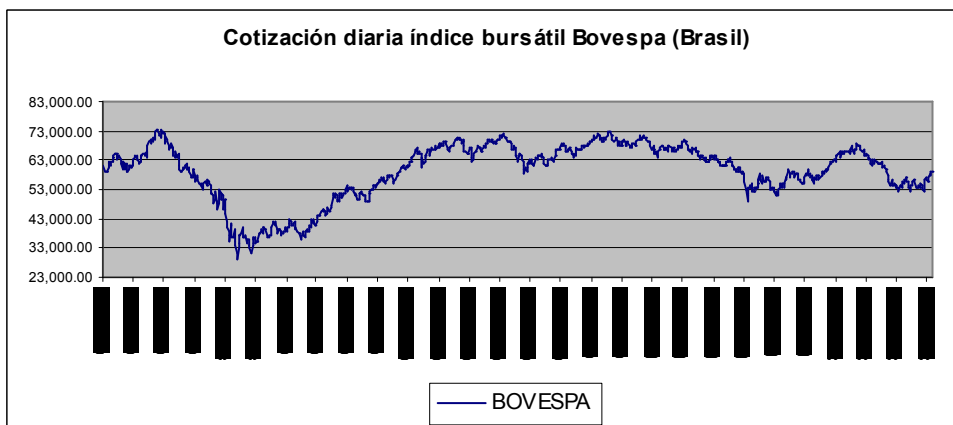
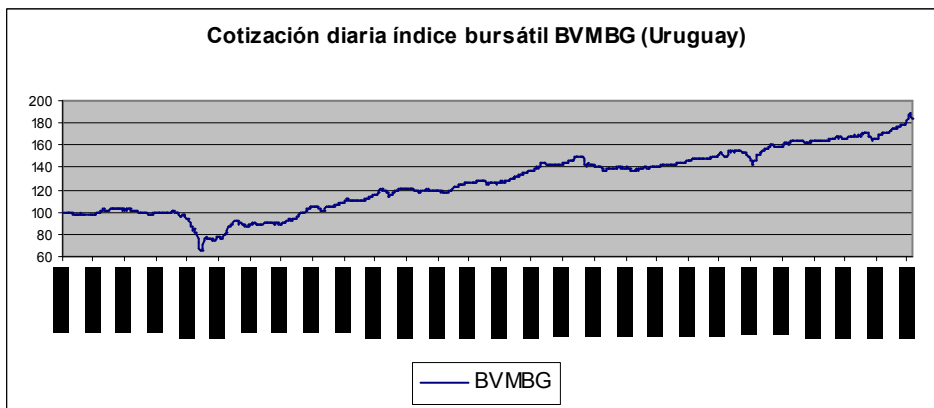
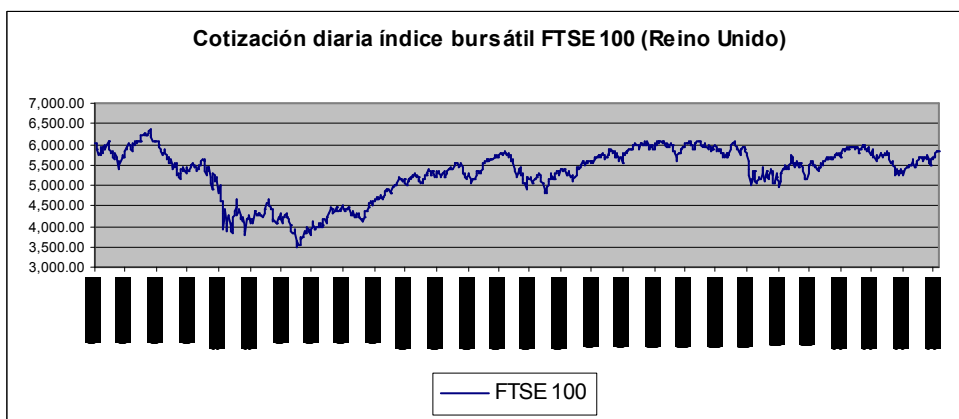
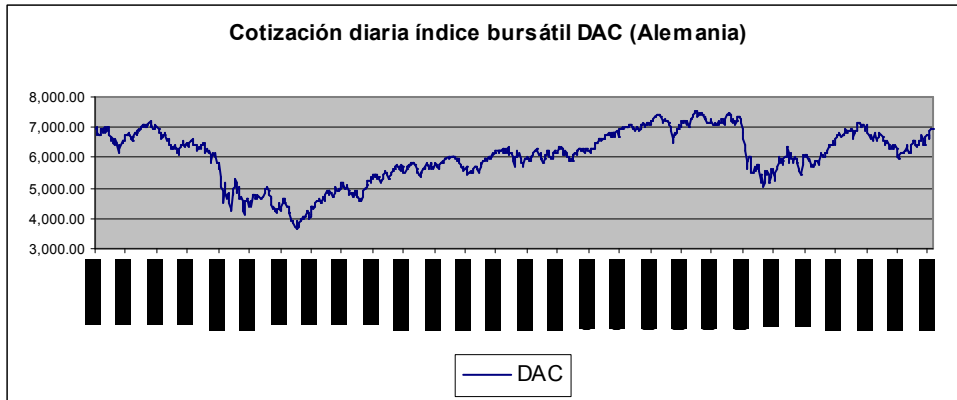
**Included observations: 1742**

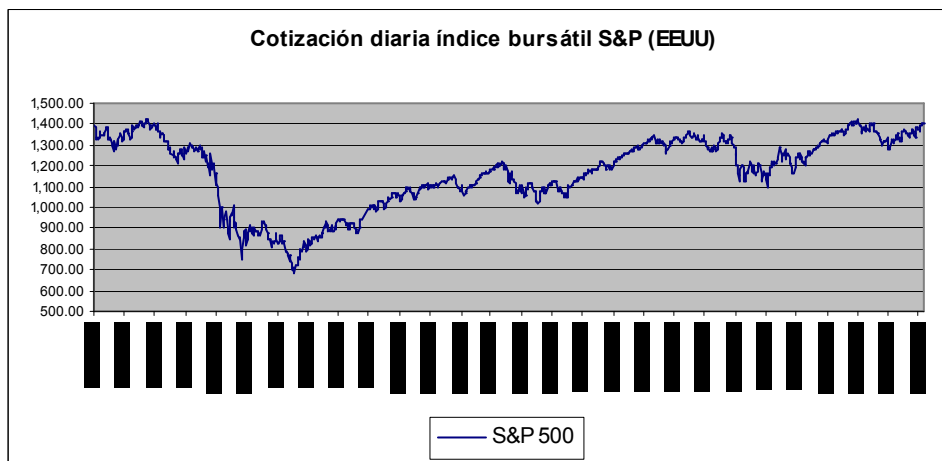
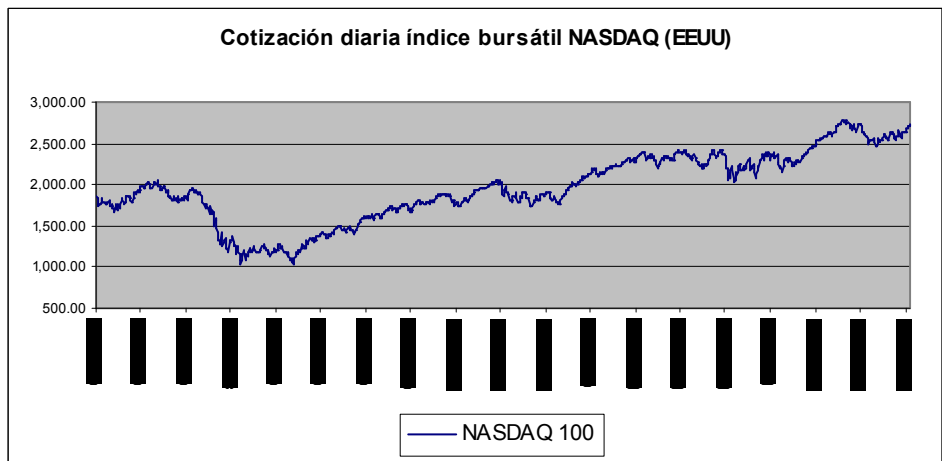
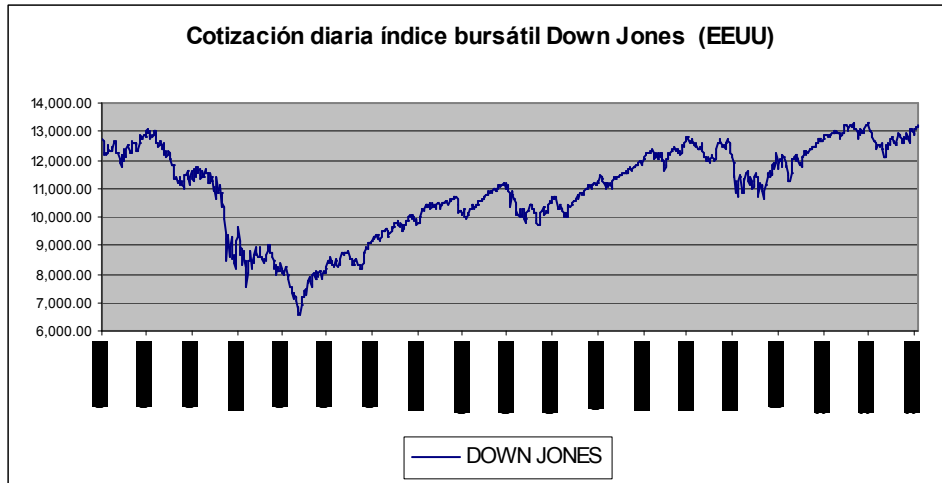
---

<u>Dimension</u>	<u>BDS Statistic</u>	<u>Std. Error</u>	<u>z-Statistic</u>	<u>Prob.</u>
2	0.016413	0.002832	5.796153	0.0000
3	0.029524	0.003182	9.279656	0.0000
4	0.032779	0.002683	12.21578	0.0000
5	0.030478	0.001983	15.37208	0.0000
6	0.025930	0.001356	19.11564	0.0000

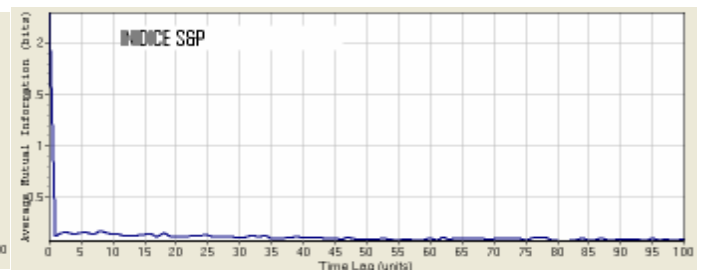
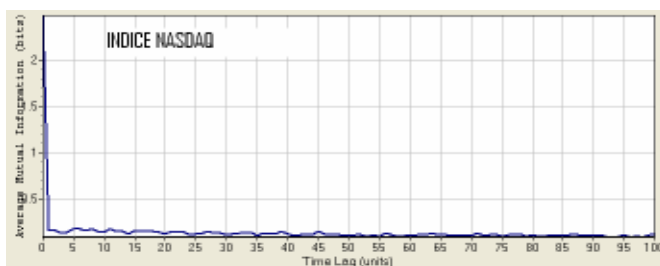
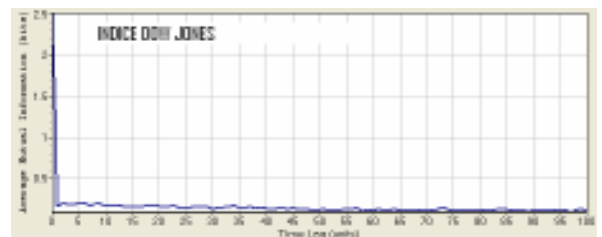
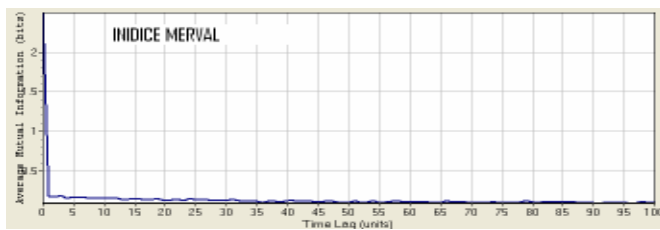
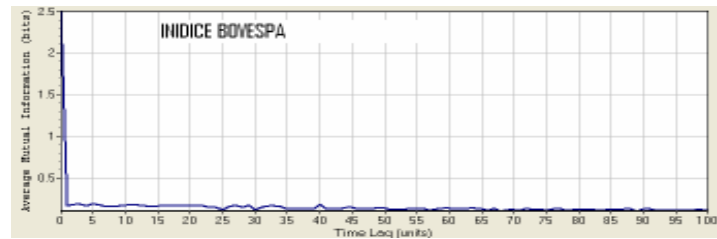
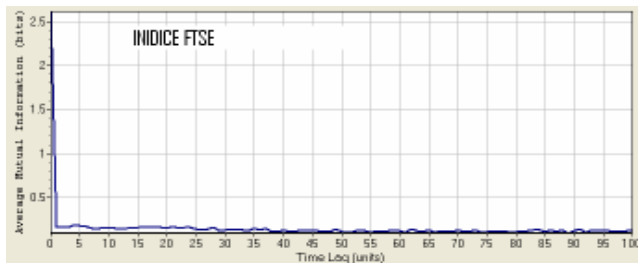
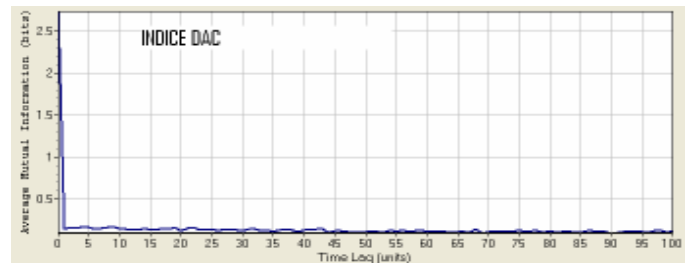
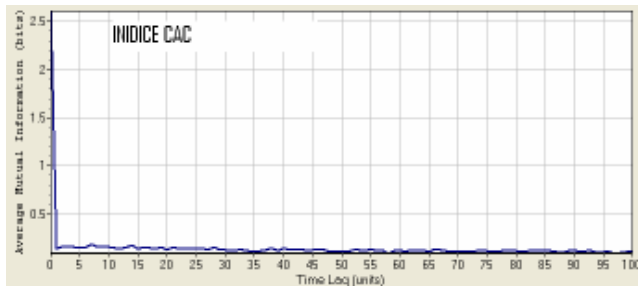
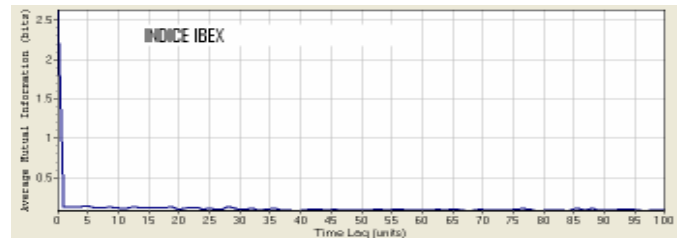
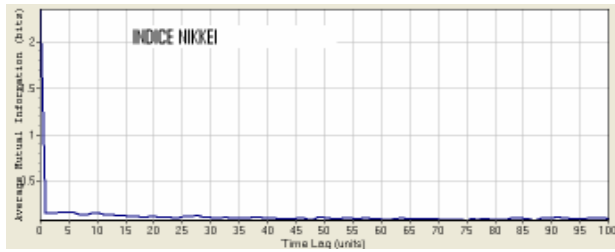
# ANEXO 3: GRÁFICOS DE LOS INDICES BURSÁTILES



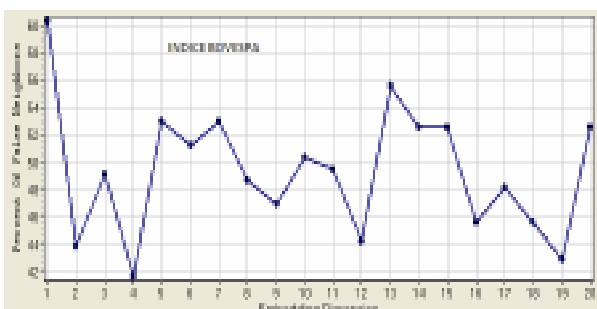
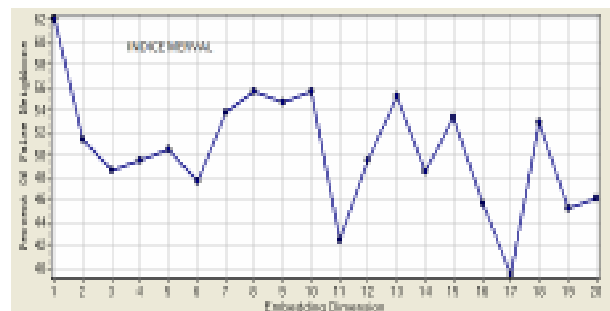
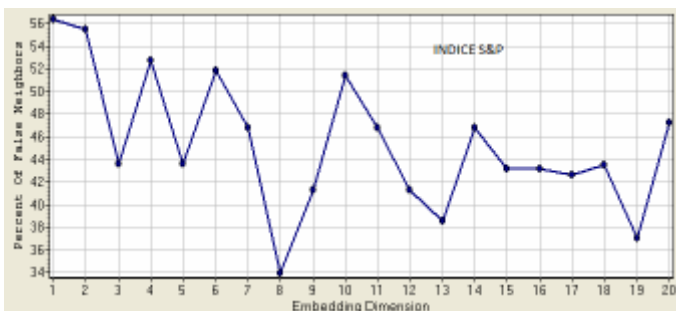
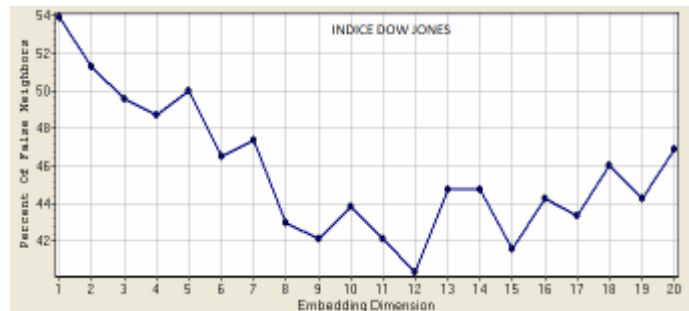
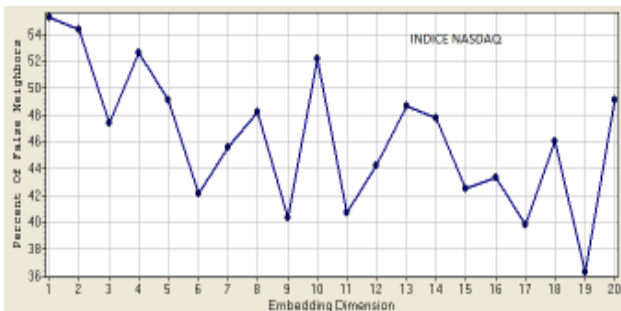
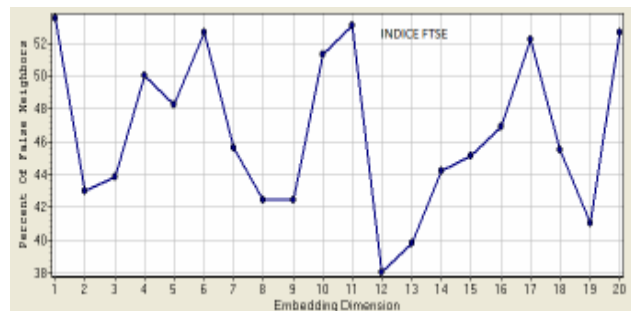
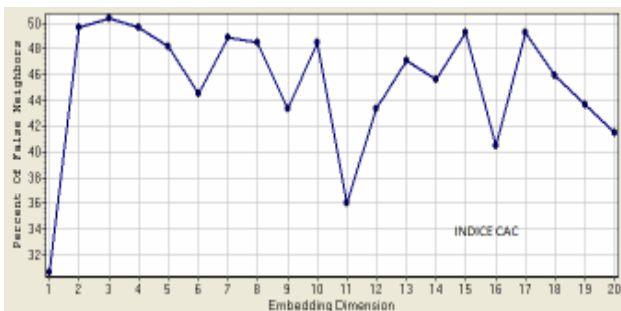
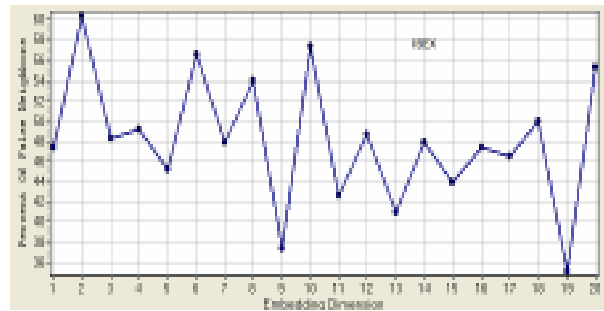
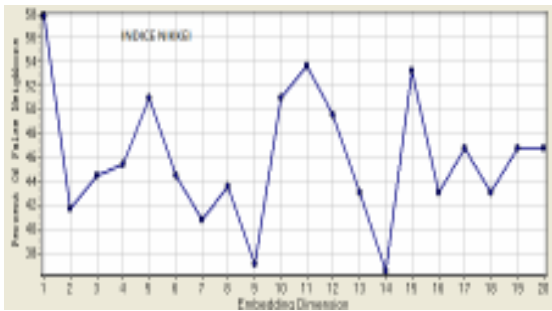




## ANEXO N° 4 – RESULTADO DEL CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE INFORMACIÓN MUTUA PARA LAS SERIES DE RETORNOS DIARIOS DE LOS INDICES BURSÁTILES



## ANEXO 5 RESULTADOS DEL CÁLCULO DE FALSOS VECINOS CERCANOS PARA LA SERIE DE TASA DE VARIACIÓN DIARIA DE LOS INDICES BURSÁTILES



**ANEXO 6 GRÁFICOS DE RECURRENCIA DE INDICES BURSATILES**

